A.O.7385

UNIVERSITE DE PROVENCE

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jacques BREUNEVAL

Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques.

Soutenue le 25 septembre 1972 devant
la commission d'examen : MM. P. CASAL
P. GERMAIN
J.M. SOURIAU
T. VOGEL

UNIVERSITE DE PROVENCE

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jacques BREUNEVAL

Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques.

Soutenue le 25 septembre 1972 devant
la commission d'examen : MM. P. CASAL
P. GERMAIN
J.M. SOURIAU
T. VOGEL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

M.M.	J. VALENSI	Mécanique Expérimentale des Fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	Y. DOUCET	Physique
	J.M. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie organique
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	G. GOUVERNET	Géologie appliquée
	A. VISCONTI	Physique théorique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales
	M. DUSSARDIER	Physiologie animale
	M. PERROT	Physique
	P. QUEZEL	Botanique
	E. CRAUSSE	Physique (Avignon)
	A. JULG	Chimie théorique
	S. TAXI (Mme)	Géologie historique
	F. TESSIER	Géologie générale
	M.L. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
	M. BERTRAND	Chimie
	J. TROMPETTE	Physique

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547020_0025

M.M.	M. LAFFITTE	Chimie
	R. FRAISSE	Mathématiques
	C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
	R. NEGRE	Biologie végétale
	R. COULON	Physique
	R. KERN	Minéralogie
	L. SIDERIADES	Physique
	J.M. SURZUR	Chimie organique
	H. CHANTREL	Physique de l'espace
	J. SOUGY	Géologie
	J. HERVE	Electronique
	H. BODOT	Chimie
	J. CHOUTEAU	Physiologie animale
	R. PHILIP	Physique
	L. CAPELLA	Minéralogie
	P. BILLARD	Mathématiques
	M. BONNEAU	Mathématiques
	J.C. TRAYNARD	Chimie industrielle
	C. CLARION (Mle.)	Mécanique des fluides
	A. PONS	Botanique
	A. GIRARDIE	Zoologie
	J.C. MAIRE	Chimie
	M. SIMON	Physiologie animale
	J. MANDELBROJT	Physique
	J.P. DAVID	Physique
	M. BIZOUARD	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.M.	R. AMAR	Zoologie
	L. DEVEZE	Biologie marine
	R. CHANDEBOIS (Mle)	Biologie animale
	H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
	F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
	F. PECAUT (Mme)	Mathématiques (Avignon)
	J. HENNEQUIN	Electronique
	S. GUEIRARD (Mle)	Pétrographie
	C. FEUGEAS	Chimie
	J. CABANÉ	Chimie
	G. RASIGNI	Physique
	S. COMBET	Chimie
	R. GARRON	Physique expérimentale
	M. CADILHAC	Physique
	B. WAEGELL	Chimie
	G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
	F. HALBWACHS	Physique (Avignon)
	R. PETIT	Physique
	M. HUGON	Psycho-physiologie
	M. PICHENOT (Mle)	Biologie végétale
	M. GILLET	Physique

M.M.	J.P. ROGGERO	Chimie (Avignon)
	L. SARDA	Biochimie
	C. ROMAN	Physiologie animale
	A. GILLET	Mathématiques
	S. MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M.M.	H. PATIN	Chimie
	J. CRESP	Biologie animale
	M. BENARROCHE	Physique
	H. TACHOIRE	Chimie
	E.J. VINCENT	Chimie
	L. VICENTE	Biologie animale
	J. MANUCEAU	Mathématiques
	R. GUERMEUR	Physique
	M. DELAAGE	Biochimie
	F. CATZIGRAS (Mle)	Géologie
	M. SIRUGUE (Mme)	Physique
	H. MERDY	Physique
	L. PUJOL	Chimie
	A. LAVAGNE	Biologie végétale
	J. GIUDICELLI	Biologie animale
	M. FOUGEREAU	Biochimie
	G. NOAT	Physiologie végétale
	R. BOUDET	Mathématiques
	R. STREIFF	Chimie
	J.P. BELAICH	Microbiologie
	P. NEUVILLE	Biologie végétale
	J.P. SOUBLIN	Mathématiques
	S. DELACHE (Mme)	Mathématiques

	G. FARDOUX	Mathématiques (Chargé d'enseignement)
	B. MORIN	Mathématiques (Chargé d'enseignement)
	B. BALLET	Mathématiques (Chargé d'enseignement)

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur Pierre CASAL ; il m'a donné des idées, des conseils, son temps, sa confiance et son amitié.

Je remercie Messieurs Paul GERMAIN et Théodore VOGEL d'avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Merci à Monsieur Jean-Marie SOURIAU à qui je dois beaucoup et qui m'a proposé le sujet de ma seconde thèse.

Je suis reconnaissant à Mademoiselle Geneviève FOISSAC d'avoir transformé en ce qui suit de si mauvais manuscrits.

Table des matières
****

pages

Introduction 1

Chapitre 1 - Formes et déformations des surfaces matérielles 5

1 - Sur les champs de vecteurs de R^3 définis et différentiables sur une surface de R^3. 5

1,1 - Métrique et première forme fondamentale 5

1,2 - Dérivation d'un champ de vecteurs - Connexion - Opérateurs de courbure 6

1,3 - Champs de 2-formes - Divergence et Rotationnel 10

1,4 - Déplacements virtuels. 12

2 - Sur la forme d'une surface matérielle 14

2,1 - Configurations et forme - Caractérisation de la forme 14

2,2 - Déformation tangentielle et déformation des courbures 17

3 - Relations de Gauss-Codazzi - Compatibilité des déformations 18

3,1 - Courbure Riemannienne 18

3,2 - Relations de Gauss-Codazzi 19

3,3 - Relations de compatibilité des déformations 21

3,4 - Compatibilité des petites déformations 24

Chapitre 2 - Coques minces conservatives 27

1 - Milieux continus conservatifs à deux dimensions 27

2 - Coques minces conservatives 28

2,1 - Energie de déformation 28

2,2 - Calcul des efforts - Relations contraintes-énergie - Efforts au bord - Equations d'équilibre et équations du mouvement 30

2,3 - Coques soumises à des compressions 35

3 - Elasticité linéaire des coques tangentiellement isotropes 36

3,1 - Energie spécifique - Modules d'élasticité des coques 37

3,2 - Relations contraintes-déformations - Le cas des membranes 38

3,3 - Expression des déformations en fonction des flèches 39

Chapitre 3 - Les modules d'élasticité des coques suivant la théorie de Love-Kirchhoff-Koiter 42

1 - La théorie de Love-Kirchhoff 42

2 - Les tenseurs de déformation 44

3 - Calcul des modules d'une coque 46

4 - L'hypothèse de Love-Kirchhoff-Koiter 47

pages

5 - L'hypothèse H_5 49

6 - L'hypothèse H_3 50

7 - Conclusion 51

Chapitre 4 - Sur une théorie générale des coques 52

1 - Principe des travaux virtuels et équations des coques 52

1,1 - Principe des travaux virtuels 52

1,2 - Théorème : Caractérisation des déplacements virtuels prolongeables par un champ de moments 53

1,3 - Equations des contraintes des coques 57

1,4 - Sur une extension du principe des travaux virtuels impliquant des microstructures 59

2 - Coques soumises à des liaisons internes. 62

2,1 - Liaisons internes dans les milieux continus 62

2,2 - Liaisons internes dans les coques 67

2,3 - Coques fibreuses 70

3 - Microstructures. 71

3,1 - Milieux de Cosserat 71

3,2 - Coques de Cosserat 75

Bibliographie 79

INTRODUCTION

Une coque mince est un milieu continu limité par deux surfaces (les faces), suffisamment voisines pour que la position (ou plutôt configuration) de la coque puisse être décrite par la donnée d'une surface unique $\mathcal{S}$ (le support géométrique) à bord γ et à coins q_1, q_2, q_3..... (discontinuité de γ).

La théorie classique ([13],[15],[19]) des coques minces élastiques est déduite par approximation de l'élasticité à 3 dimensions. Elle repose sur les hypothèses de Love-Kirchhoff [23], hypothèses ad hoc destinées à éliminer dans les équations le comportement interne du matériau. La théorie faite, l'étude d'une coque est celle d'un milieu à 2 dimensions sur lequel sont définis divers champs : densité superficielle de masse, énergie spécifique superficielle, etc... L'épaisseur h n'est plus alors qu'un simple champ scalaire défini sur la surface $\mathcal{S}$; elle reste petite devant les autres dimensions de la coque et les rayons de courbure, ce qui n'est que la définition de la minceur. Dans la plupart des cas pratiques (envisagés par les ingénieurs) la théorie s'avère bonne, particulièrement en ce qui concerne les plaques. Elle reste qualitativement convenable dans un très grand nombre de cas (même si les flèches qui apparaissent ne sont pas tout à fait celles que la théorie prévoit). Cependant certains problèmes particuliers nécessitent une révision des hypothèses de base ([1],[2],[26], coques hélicoïdales [6]).

Dans le chapitre 2 nous étudions le problème théorique suivant : rechercher le cadre général d'une théorie des coques minces élastiques fondée sur les exigences suivantes :

1°) Une <u>configuration</u> d'une coque mince est la donnée d'un milieu continu à deux dimensions, donc d'une surface $\mathcal{S}$ à bord γ et à coins p_1, p_2,

$p_3 \cdots$, et d'un champ scalaire $p \to h$ ($p \in \mathcal{S}$) que l'on appellera l'épaisseur.

2°) Il existe une énergie de déformation qui ne dépend que de la forme (c'est à dire invariante par tout déplacement isométrique (1)). On admettra le principe de localisation suivant lequel il existe une énergie spécifique (ou densité superficielle d'énergie) de déformation.

3°) Les efforts au bord (2) de tout morceau de la coque sont de nature classique : ils se traduisent par des forces et des couples de flexion et de torsion (3).

De ces impératifs pris comme hypothèses nous déduisons une théorie généralisée non linéaire des coques élastiques qui fournit automatiquement, par les vertus du calcul des variations, des conditions aux bords sans ambiguité (cf.[23]). Les relations contraintes-déformations que nous déduisons permettent d'écrire les équations d'équilibres ou celles de la dynamique des coques minces élastiques.

Par linéarisation et dans le cas d' " isotropie superficielle ", nous retrouvons qualitativement la théorie classique. Mais ici il apparait au moins 4 modules d'élasticité reliés entre eux par des inégalités. Leur expression en fonction des modules du matériau (élasticité à 3 dimensions) est évidemment étrangère à cette théorie. Ces expressions sont calculées dans le chapitre 3 où est exposée la théorie classique de Love-Kirchhoff-Koiter et où nous analysons les hypothèses faites et par conséquent la validité des expressions des modules.

Dans l'étude expérimentale d'une coque, deux cas se présentent suivant qu'elle est ou non soumise à des " compressions ", efforts agissant directement sur l'épaisseur sans déformer nécessairement la surface support. Par la forme même de ses hypothèses la théorie de Love-Kirchhoff-Koiter élimine ce type d'efforts (ce n'est pas le cas de théories voisines telles que [26] par exemple). Si l'on admet de telles compressions, l'épaisseur

---

(1) Dans la suite nous dirons " isométrie " pour éviter toute confusion avec les " déplacements virtuels " considérés en calcul des variations, qui ne sont pas isométriques.
(2) Le bord est différentiable par morceaux.
(3) Il est possible de remplacer les couples de torsion par des forces

(dans la configuration sans contrainte) soit intervenir dans nos équations comme fonction inconnue, au même titre que la surface déformée. Cela suppose que l'énergie spécifique de déformation dépende explicitement de l'épaisseur (dans la configuration déformée). On peut déduire de cette expression, si elle est connue, la relation " compression-déformation " (il s'agit non seulement de la déformation du support $\mathcal{S}$ mais aussi de la variation d'épaisseur). Cela ne présente aucune difficulté et ne fait qu'introduire, dans la théorie linéarisée, des modules d'élasticité supplémentaires. Dans la théorie des coques non compressées, le champ d'épaisseur (dans la configuration déformée) est complètement déterminé par la forme du support géométrique ; ce champ n'intervient pas comme inconnue et, par conséquent, n'est pas déterminé par les équations. Cela devient une notion étrangère à la théorie. La détermination de h dépend du type de problème étudié : on peut, par exemple, supposer que le matériau se déforme sans variation de volume, sans que cela soit une liaison imposée par le matériau : on déduit alors le champ d'épaisseur de la relation $h\sqrt{\det G} = h_o\sqrt{\det G_o}$ (en notant h et h_o, G et G_o les épaisseurs et matrices de première forme quadratique fondamentale, respectivement dans le configuration déformée et avant déformation). Mais ce n'est qu'un cas particulier de la théorie envisagée plus haut où l'énergie spécifique (superficielle) contient explicitement l'épaisseur. On peut également supposer que le matériau est incompressible : il se déforme sans variation de volume, mais non plus par des contraintes adéquates, mais par la présence de la liaison $h\sqrt{\det G} = h_o\sqrt{\det G_o}$, ce qui est très différent.

C'est au chapitre 4 que sont étudiées les liaisons internes dans les milieux continus à trois dimensions et dans les coques minces : une telle liaison se traduit par une condition restreignant la déformation. Nous étudions en particulier les milieux et les coques soumis à des liaisons holonômes du premier ordre : ce sont, par exemple, les coques incompressibles (définies ci-dessus) et les coques fibreuses (inextensibles suivant certaines directions).

- Les équations (E) des contraintes des coques ont été obtenues au chapitre 1 à partir des hypothèses que nous avons dites dont, en particulier, celle de conservation de l'énergie. Le chapitre 4 est consacré à l'élargissement de cette théorie et en tout premier lieu, nous y établissons la validité des équations (E) pour des coques non nécessairement conservatives en fondant cette étude sur le principe des travaux virtuels. Cependant on peut donner de ce principe un énoncé (proposé par J.M. SOURIAU) qui, bien qu'équivalent au précédent pour un milieu à trois dimensions, fournit à deux dimensions des équations de coques avec certaines microstructures. Nous retrouvons en effet ces équations au paragraphe 3, consacré aux microstructures de Cosserat, à partir de l'énoncé classique du principe des travaux virtuels.

- La théorie des coques, directement bidimensionnelle, est parfaitement consistante, infiniment plus simple dans le cas non linéaire qu'une éventuelle approximation de la théorie à trois dimensions. On n'y perd, en élasticité linéaire, et par rapport à la théorie classique de Love-Kirchhoff, que l'expression (sujette à caution : cf. chapitre 3) des modules d'élasticité des coques en fonction des modules de Lamé du matériau.

- Le chapitre 1 rassemble les résultats de géométrie locale nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Comme le chapitre 3, il ne contient rien d'original sinon dans la forme et, peut-être, dans quelques démonstrations telle que celle des relations de Gauss-Codazzi. A ce sujet, il faut signaler un problème ignoré dans ce travail et pourtant sous-jacent : la rigidité globale des surfaces ; on en connait des solutions partielles (sphère, tore, surfaces convexes avec ou sans bords [8]..) mais sa solution générale (probablement pour toute surface compacte sans bord ou à bord appuyé) éclairerait d'un jour nouveau la théorie des coques.

CHAPITRE 1 - FORMES ET DEFORMATIONS DES SURFACES MATERIELLES.

1 - Sur les champs de vecteurs de R^3 définis et différentiables sur une surface de R^3.

1,1 - Métrique et première forme fondamentale.

1,1,1 - Dans ce qui suit, nous noterons $\bar{V}$ le covecteur transposé d'un vecteur V de R^3 ; $\bar{A}$ désignera le transposé d'un opérateur linéaire A. Ainsi $\bar{V}\,W$ est le produit scalaire des vecteurs V et W.

Soit f une carte d'une surface $\mathcal{S}$ de R^3, c'est à dire une application différentiable (1) injective et de rang 2 d'un ouvert U de R^2 dans R^3 ; son domaine de valeur f(U) est un ouvert de $\mathcal{S}$. Si $x \in U$, on posera $p = f(x)$.

Soit $\frac{\partial p}{\partial x} = Df(x)$ l'application linéaire tangente à f en x. $\frac{\partial p}{\partial x}$ établit une bijection linéaire, notée S, entre R^2 et $Tp(\mathcal{S})$ l'espace tangent en x à $\mathcal{S}$. S est la base naturelle de $Tp(\mathcal{S})$ associée à la carte f. Si $dx \in R^2$, $dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx = S\,dx$ est tangent en p à $\mathcal{S}$.

1,1,2 - La métrique induite de R^3 sur $\mathcal{S}$ est définie par :

$ds^2 = \overline{dp}\,dp = \overline{dx}\,G\,dx$ où $\boxed{G = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \bar{S}\,S}$

G est la matrice de la première forme quadratique fondamentale (2).

---

(1) La classe de différentiabilité sera supposée suffisamment élevée pour que tous les calculs qui suivent aient un sens.

(2) Si $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ on a :

$$g_{11} = \overline{\frac{\partial p}{\partial x^1}}\,\frac{\partial p}{\partial x^1} \qquad g_{22} = \overline{\frac{\partial p}{\partial x^2}}\,\frac{\partial p}{\partial x^2} \qquad g_{12} = \overline{\frac{\partial p}{\partial x^1}}\,\frac{\partial p}{\partial x^2} = \overline{\frac{\partial p}{\partial x^2}}\,\frac{\partial p}{\partial x^1} = g_{12}$$

Le vecteur unitaire normal N en p est défini par $\bar{N}\,N = 1$ et $\bar{N}\,\Im = 0$ (3). La forme $p \mapsto N$ est différentiable. Il est défini globalement si la surface est orientable. Choisir l'une ou l'autre orientation de N revient à orienter la surface. $\pi = 1 - N\,\bar{N}$ est la projection orthogonale sur $T_p(\mathcal{S})$ $1 - \pi = N\,\bar{N}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace normal en p.

1,2 - Définition d'un champ de vecteurs tangents.

1,2,1 - Soit $D^2 f(x)$ la dérivée seconde de la carte f.

$D^2 f(x) : \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^3$ est une application bilinéaire symétrique :

$$D^2 f(x)(\partial x)(\partial' x) = D^2 f(x)(\partial' x)(\partial x)$$

$$\forall\, \partial x \in \mathcal{E}^2\,, \quad \forall\, \partial' x \in \mathcal{E}^2$$

La projection orthogonale sur $T_p(\mathcal{S})$ du vecteur $D^2 f(x)(\partial x)(\partial' x)$ de $\mathcal{E}^3$ est un vecteur tangent en p dont on note $\Gamma(\partial x)(\partial' x)$ l'expression dans la base naturelle $\Im$:

$$\underline{\pi . D^2 f(x)(\partial x)(\partial' x) = \Im . \Gamma(\partial x)(\partial' x)}$$

La projection orthogonale sur le sous-espace normal de ce même vecteur a pour composante sur N la forme bilinéaire $\overline{\partial x}\ \Gamma\ \partial' x$ (Γ est une matrice de $\mathcal{E}^2$) :

$$\underline{(1 - \pi)\, D^2 f(x)(\partial x)(\partial' x) = (\overline{\partial x}\ \Gamma\ \partial' x)\ N}$$

Proposition : Soient $p \mapsto \delta p$ et $p \mapsto \delta' p$ deux champs de vecteurs tangents, d'expression locale (dans la base naturelle associée à la carte) $x \mapsto \delta x$ et $x \mapsto \delta' x$ ($\delta p = \Im\, \delta x$ et $\delta' p = \Im\, \delta' x$). Le champ de vecteurs $p \mapsto d_{\delta p}\, \delta' p$, dérivé du second dans la direction du premier est un tangent et d'expression locale :

$$\boxed{d_{\delta p}\, \delta' p = \Im \left[d\, \delta' x + \Gamma(\delta x)(\delta' x) \right] + \overline{\delta x}\ \Gamma\ \delta' x\, . N}$$

En effet, $\delta p = Df(x)\delta x$

et $d\delta p = D^2 f(x)(\delta x)(\delta' x) + Df(x)\, d\delta x$

De $Df(x)d\delta x = \Im d\delta x$ et des définitions de Γ et Γ résulte l'expression énoncée

---

(3) En effet : $\bar{N}\, dp = 0 \quad \forall\, dp \in T_p(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \bar{N}\, \Im\, \partial x = 0 \quad \forall\, \partial x \in \mathcal{E}^2 \Leftrightarrow \bar{N}\, \Im = 0$

ce qu'on peut également écrire $\bar{N}\, \dfrac{\partial x}{\partial x} = 0$ ou $\dfrac{\overline{\partial x}}{\partial x}\, N = 0$

1,2,2 - Γ est l'opérateur de Christoffel dont les composantes Γ_{ij}^{k} dans la base S sont les symboles de Christoffel. Γ caractérise la connexion Riemannienne que l'on désignera par le symbole $\hat{}$ et qui associe à deux champs de vecteurs tangents $p \mapsto dp$ et $p \mapsto \delta p$ le champ de vecteurs tangents $p \mapsto \hat{d}\delta p = \pi d\delta p$ d'expression locale :

$$\boxed{\hat{d}\delta p = S[\, d\delta x + \Gamma(dx)(\delta x)]}$$

Il résulte de la symétrie de $D^2 f(x)$, la symétrie de la connexion :

$$\boxed{\Gamma(dx)(\delta x) = \Gamma(\delta x)(dx) \qquad (\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k})}$$

Soit $\frac{\hat{\partial}\delta p}{\partial p} : Tp(\mathcal{E}) \to Tp(\mathcal{E})$ l'application linéaire définie par $\hat{d}\delta p = \frac{\hat{\partial}\delta p}{\partial p} dp$. C'est la dérivée intrinsèque sur $\mathcal{E}$ du champ $p \to \delta p$. Elle est représentée dans la base S par la matrice $\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \Gamma(\delta x)$, communément appelée dérivée covariante.

Théorème : L'opérateur de Christoffel Γ est complètement déterminé par le système d'équations :

$$d\,G = G\,\Gamma(dx) + \overline{\Gamma(dx)}\,G \qquad \forall\, dx \in R^2$$

$$\Gamma(dx)(\delta x) = \Gamma(\delta x)(dx) \qquad \forall\, dx \in R^2,\ \forall\, \delta x \in R^2$$

En effet $G = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\ \frac{\partial p}{\partial x}$ implique $dG = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\, d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + d\left(\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\right) \frac{\partial p}{\partial x}$

Mais $d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = d\,(Df(x)) = D^2 f(x)(dx) = \frac{\partial p}{\partial x}\,\Gamma(dx) + N\,\overline{dx}\,F$ donc

$\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\, d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\ \frac{\partial p}{\partial x}\,\Gamma(dx)$ car $\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\, N = 0$ (cf. note 2)

d'où $d\,G = G\,\Gamma(dx) + \overline{\Gamma(dx)}\,G$

Soient Γ et Γ' deux solutions du système proposé. Posons $D = \Gamma - \Gamma'$. On a :

$$G\,D(dx) + \overline{D(dx)}\,G = 0$$

$$D(dx)(\delta x) - D(\delta x)(dx) = 0 \qquad \forall\, dx, \delta x \in R^2$$

Montrons qu'on en déduit $D = 0$:

On a : $\overline{\delta x}\,[\,G\,D(dx) + \overline{D(dx)}\,G\,]\,\partial x = 0 \qquad \forall\, dx, \delta x, \partial x$

Soit $\overline{\delta x}\,G\,D(dx)\partial x = -\,\overline{\delta x}\,\overline{D(dx)}G\partial x$

or $\overline{\delta x}\,G\,D(dx)\partial x = \overline{\delta x}\,G\,D(\partial x)\,dx$ (D est symétrique)

$= \overline{dx}\,\overline{D(\partial x)}\,G\,\delta x$ (Un scalaire égale son transposé et $\bar{G} = G$)

$= -\overline{dx}\,G\,D(\partial x)\delta x$ ($G\,D(\partial x) + \overline{D(\partial x)}\,G = 0$)

$= -\overline{dx}\,G\,D(\delta x)\partial x$ (D est symétrique)

$= \overline{dx}\,\overline{D(\delta x)}\,G\,\partial x$ ($G\,D(\delta x) + \overline{D(\delta x)}\,G = 0$)

$= \overline{D(\delta x)(dx)}\,G\,\partial x$ (propriété de la transposition)

$= \overline{D(dx)(\delta x)}\,G\,\partial x$ (D est symétrique)

$= \overline{\delta x}\,D(dx)\,G\,\partial x$ (propriété de la transposition)

Le premier membre est égal et opposé au second. Il est nul :

$$\delta x\,G\,D(dx)\partial x = 0 \qquad \forall\, \delta x, dx, \partial x.$$

Comme G est régulière on obtient $D(dx) = 0 \quad \forall\, dx$ donc $D = 0$.

Il en résulte que les symboles de Christoffel Γ^{k}_{ij} s'expriment en fonction des composantes g_{ij} du tenseur métrique et de leurs dérivées $\partial_k g_{ij}$(4).

1,2,3 - F est la matrice de la deuxième forme quadratique fondamentale.

De la symétrie de $D^2f(x)$, il résulte $\overline{dx}\,F\,\delta x = \overline{\delta x}\,F\,dx$ et par conséquent : $\boxed{F = \bar{F}}$ (F est symétrique)

Proposition : Si $\frac{\partial N}{\partial x} : R^2 \to R^3$ est l'application linéaire tangente au champ $x \to N$ de R^2 dans R^3, on a :

$$\boxed{F = -\,\overline{\frac{\partial N}{\partial x}}\,\frac{\partial p}{\partial x} = -\,\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\,\frac{\partial N}{\partial x}} \quad (5)$$

En effet $\overline{dx}\,F\,\delta x = \bar{N}\,d\,\delta p = -\,\overline{dN}\,\delta p$ car $\bar{N}\,\delta p = 0$

$$\overline{dx}\,F\,\delta x = -\overline{dx}\,\overline{\frac{\partial N}{\partial x}}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x \qquad \forall\, dx \quad \forall\, \delta x.$$

L'application linéaire tangente $dp \mapsto dN$ au champ $p \mapsto N$ définit une application

---

(4) Seul ce résultat nous intéresse ici. On peut consulter par exemple [7] ou [14] pour la résolution du système.

(5) En posant $F = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$, on a : $l = \bar{N}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^1 \partial x^1}$, $m = \bar{N}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^1 \partial x^2}$, et

$n = \bar{N}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2 \partial x^2}$

linéaire du plan tangent $Tp(\mathcal{S})$ car dN est tangent ($\bar{N}\,N = 1 \Rightarrow \bar{N}\,dN = 0 \Rightarrow d\,N$ tangent). On la note C, de sorte que

$$\boxed{d\,N + C\,dp = 0}$$

C est l'opérateur de courbure (6)

On a évidemment $\boxed{\overline{dp}\;C\;\delta p = \overline{dx}\;F\;\delta x}$ et $\boxed{\bar{C} = C}$

Dans la base S, associée à la carte f, C est représentée par la matrice $G^{-1}F$.

En effet $F = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\;C\;\frac{\partial p}{\partial x} = \bar{S}\;C\;S$ et $S^{-1}C\;S = (\bar{S}\;S)^{-1}\;\bar{S}\;C\;S = G^{-1}F$.

1,2,4 - Théorème : Soient $p \mapsto dp$ et $p \mapsto \delta p$ deux champs de vecteurs tangents. Le champ de vecteurs $p \mapsto d\delta p$ dérivé du second dans la direction du premier est le champ non tangent :

$$\boxed{d\delta p = \hat{d}\delta p + \overline{dp}\;C\;\delta p.N}$$

où : C est l'opérateur de courbure

$\hat{d}\delta p = \frac{\hat{\partial}\delta p}{\partial p}\,dp$

et $\frac{\hat{\partial}\delta p}{\partial p}$ est la dérivée intrinsèque sur $\mathcal{S}$ du champ $p \mapsto \delta p$.

Cet énoncé est la forme intrinsèque de la proposition du § 1,2,1.

1,2,5 - Dérivation d'un champ de vecteurs de R^3 défini et différentiable sur une surface $\mathcal{S}$ de R^3.

Théorème : Soient $p \mapsto \delta p$ un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{S}$ et à valeurs dans R^3 (généralement non tangent)

Soit $p \mapsto dp$ un champ de vecteurs tangents à $\mathcal{S}$.

Le champ de vecteurs $p \mapsto d\delta p$ dérivé du premier dans la direction du second a pour expression

$$\boxed{d\delta p = [\hat{d}(\pi\delta p) - \bar{N}\delta p.C\,dp] + [\overline{dp}\;C\;\pi\delta p + d(\bar{N}\delta p)]\;N}$$

---

(6) Si ρ et dp sont valeur et vecteur propres (correspondants) de C alors $dN + \rho dp = 0$ (formule d'Olinde-Rodrigues). dp suivant une direction de courbure principale pour laquelle la courbure principale est $\rho = \frac{1}{R}$ on a
det C = courbure totale
Tr(C) = courbure moyenne.

Le premier terme est tangent et le second normal.

$\pi\delta p$ est la projection orthogonale de δp sur $Tp(\cdot)$ et $\overline{N}\delta p$ sa composante sur N :

$\delta p = \pi\delta p + (\overline{N}\delta p)\, N$.

On obtient, en différenciant :

$d(\delta p) = d(\pi\delta p) + d(\overline{N}\delta p)\, N + (\overline{N}\delta p)\, dN$ avec $dN = -Cdp$.

1,3 - Champs de 2-formes et champs de tenseurs - Divergence et rotationnel.

1,3,1 - Deux formes sur une surface.

Il existe sur une surface orientable $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ une 2-forme canonique $p \mapsto \sigma$, la forme d'Aire, définie par :

$$\sigma : Tp(\mathcal{S}) \times Tp(\mathcal{S}) \to R$$

$$\sigma\,(dp)(\delta p) = \overline{N}(dp \wedge \delta p) \qquad (\forall\ dp \text{ et } \delta p \in Tp(\mathcal{S}))$$

($\wedge$ est le produit vectoriel dans R^3)

Il existe une bijection qui, à tout champ de vecteurs tangents $p \mapsto dp$ sur $\mathcal{S}$, associe la 1-forme $p \mapsto \overline{dp}$.

Il existe une bijection qui, à tout champ de vecteurs tangents $p \mapsto dp$ sur $\mathcal{S}$, associe la 2-forme $p \mapsto \sigma(dp)$, produit intérieur de $p \mapsto dp$ par $p \mapsto \sigma$.

L'application Σ: $Tp(\mathcal{S}) \to Tp(\mathcal{S})$ définie par $\Sigma : dp \mapsto \overline{\sigma(dp)}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de la normale

On a : $\underline{\sigma(dp)(\delta p) = \overline{\delta p}\ \Sigma\ dp}$.

Dans une carte $x \mapsto p$, si $x \mapsto dx$ et $x \mapsto \delta x$ représentent respectivement $p \mapsto dp$ et $p \mapsto \delta p$ on a :

$$\sigma(dp)(\delta p) = \sqrt{\det G}\ \overline{dx} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \delta x$$

L'application Σ est représentée par la matrice $\sqrt{\det G}\ G^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Toute autre 2-forme peut se noter $\lambda\sigma$ où $p \mapsto \lambda$ est une fonction numérique sur $\mathcal{S}$.

1,3,2 - Dérivation extérieure ∇ .

La dérivée extérieure d'une 1-forme est une 2-forme qu'on peut noter $\lambda\sigma$, ce qui justifie les définitions :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla[\ \overline{V}\ ] &= \text{rot } V.\sigma \\ \nabla[\sigma(V)] &= \text{div } V.\sigma \end{aligned}}$$

Le rotationnel $p \to \text{rot } V$ et la divergence $p \mapsto \text{div } V$ sont des champs scalaires.

Propositions : 1) $\text{div } V = \text{rot}(\Sigma V)$

2) $\text{rot grad} = 0$

3) $\text{div}(uV) = u \text{ div } V + \overline{\text{grad } u}.V$

4) $\text{div } V.\sigma(dp)(\delta p) = \sigma(dp)\hat{\delta}V - \sigma(\delta p)\ \hat{d}V$

$$\text{div } V = \text{Tr}\left(\frac{\hat{\partial}V}{\partial p}\right)$$

5) $\text{rot } V.\sigma(dp)(\delta p) = \overline{\delta p}\ \hat{d}V - \overline{dp\hat{\delta}V} = \overline{\delta p}\left(\frac{\hat{\partial}V}{\partial p} - \overline{\frac{\hat{\partial}V}{\partial p}}\right) dp$

6) Dans une carte $x \mapsto p$, si $x \mapsto X$ représente $p \mapsto V$, on a :

$$\text{div } V = \text{Tr}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \Gamma(X)\right) = \text{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{\det G}}\ \frac{\partial \sqrt{\det G}\ X}{\partial x}\right)$$

$$\text{rot } V = \text{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{\det G}}\ \frac{\partial \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} GX}{\partial x}\right).$$

1,3,3 - Dérivation sur une surface $\mathcal{S}$, de champs de tenseurs.

Soient $p \mapsto dp$ et $p \mapsto \delta p$ deux champs de vecteurs tangents sur $\mathcal{S}$; soient $p \mapsto \emptyset$ un champ de covecteurs (une 1-forme) et $p \mapsto A$ un champ de tenseurs mixtes du 2° ordre ($A \in L(Tp(\mathcal{S}))$). On définit les dérivées covariantes en p, $dp \to \hat{d}\emptyset$ et $dp \to \hat{d}A$, de ces champs par :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{d}\emptyset\,\delta p &= d(\emptyset\delta p) - \emptyset\,\hat{d}\,\delta p \\ \hat{d}A.\delta p &= \hat{d}(A\delta p) - A\,\hat{d}\,\delta p \end{aligned} \qquad \forall (p \mapsto dp) \text{ et } (p \mapsto \delta p) \text{ tangents.}}$$

Propositions :

1) $\hat{d}\overline{\delta p} = \overline{\hat{d}\,\delta p}$ $\qquad \hat{d}\overline{A} = \overline{\hat{d}A}$ $\qquad \hat{d}\Sigma = 0$

2) Dans une carte $x \mapsto p$, si $x \mapsto dx$, $x \mapsto \delta x$, $x \mapsto \phi$ et $x \mapsto \mathcal{A}$ représentent respectivement les champs $p \mapsto dp$, $p \mapsto \delta p$, $p \mapsto \emptyset$ et $p \mapsto A$, alors

$p \mapsto \hat{d}\emptyset$ est représenté par $x \mapsto d\phi - \phi\Gamma(dx)$

$p \mapsto \hat{d}A$ est représenté par $x \mapsto d\mathcal{A} + \Gamma(dx)\mathcal{A} - \mathcal{A}\Gamma(dx)$

1,3,4 - Divergence et rotationnel d'un champ de tenseurs.

Soit $p \mapsto A$ un champ d'applications linéaires du plan tangent (2-tenseurs mixtes du 2° ordre).

Soient $p \mapsto dp$, $p \mapsto \delta p$ et $p \mapsto V$ trois champs de vecteurs, $(\overline{\delta p}\ \hat{dA} - \overline{dp}\ \hat{\delta A})\ V$ ne dépend que de la valeur en p de ces champs et définit une 2-forme $\lambda\sigma(dp)(\delta p)$ où λ dépend linéairement de la valeur en p de $p \mapsto V$.

On pose $\lambda = \text{Rot } A.V$; d'où la définition du rotationnel $p \mapsto \text{Rot } A$ du champ $p \mapsto A$:

$$\boxed{\text{Rot } A.\sigma(dp)(\delta p) = \overline{\delta p}\ \hat{d}\ A - \overline{dp}\ \hat{\delta A}}$$

($\overline{\text{Rot } A}$ est un vecteur tangent en p).

On définit de même la divergence $p \mapsto \text{Div } A$ du champ $p \mapsto A$:

$$\boxed{\text{Div } A.\sigma(dp)(\delta p) = \sigma(dp).\hat{\delta A} - \sigma(\delta p)\ \hat{dA}}$$

($\overline{\text{Div } A}$ est un vecteur tangent en p).

Propositions :

1) $$\boxed{\text{Div}(AV) = \text{Div } A.V + \text{Tr}\left(A.\ \hat{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) \quad \forall (p \mapsto v) \text{ tangent}}$$

2) $$\boxed{\text{rot}(AV).\ \Sigma = \text{Rot } A.V.\ + A\ \hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial p}}\ \overline{A} \quad \forall (p \mapsto v) \text{ tangent.}}$$

3) $\text{Rot}(\Sigma A) = \text{Div}(A)$.

1,4 - Déplacements virtuels.

1,4,1 - Un déplacement de la surface $\mathcal{S}$ est une application différentiable $\phi : [0,1] \times \mathcal{S} \to R^3$ qui, à (u,p) fait correspondre $\phi(u,p) = \phi_u(p)$ de sorte que :

$\forall\ u \in R \quad \phi_u : \mathcal{S} \to R^3$ est un plongement et ϕ_o est l'identité sur $\mathcal{S}$.

Un déplacement virtuel de la surface $\mathcal{S}$ est un champ de vecteurs de R^3 (généralement non tangent à $\mathcal{S}$) $p \mapsto \delta p$

Ainsi $p \mapsto \delta p = \frac{\partial}{\partial u}[\phi(u,p)]_{u=0}$ est un déplacement virtuel et réciproquement, pour tout déplacement virtuel on peut trouver un déplacement ϕ tel qu'on ait la relation ci-dessus.

Localement, une carte dépend différentiablement de u :

$$p = f_u(x) = f(u,x) \qquad u \in [0,1], \quad x \in R^2.$$

Le vecteur unitaire normal N_u en p_u à $\ldots_u$ dépend différentiablement de (u,x).

Son déplacement virtuel est :

$$\delta N = \frac{\partial N_u}{\partial u}\Big|_{u=0} \qquad (\ p \mapsto \delta N \text{ est un champ de vecteurs tangents car } \bar{N}\, N = 1 \Rightarrow \bar{N}\, \delta N = 0\ )$$

Proposition : Le champ de vecteurs tangents $p \mapsto \delta N$ ne dépend que du champ $p \mapsto \delta p$.

On a : $\boxed{\delta N = -\pi \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial p}} N}$

ou $\boxed{\delta N = -C\,\pi\delta p - \overline{\frac{\partial \bar{N}\delta p}{\partial p}}}$

En effet $\bar{N}\, dp = 0$ implique $\overline{\delta N}\, dp + \bar{N}\, \delta dp = 0$

Mais $\delta dp = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\right)\Big|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{u=0} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\Big|_{u=0} dx$

$$= \frac{\partial \delta p}{\partial x}\, dx = d\delta p.$$

donc $\overline{\delta N}\, dp + \bar{N}\, d\, \delta p = 0$

$$\text{et } \left(\overline{\delta N} + \bar{N}\, \frac{\partial \delta p}{\partial p}\right) dp = 0 \qquad \forall\ dp \text{ tangent}$$

$$\left(\overline{\delta N} + \bar{N}\, \frac{\partial \delta p}{\partial p}\, \pi\right)\ V = 0 \qquad \forall\ V \in R^3$$

d'où la première expression cherchée.

D'autre part : $\overline{dp}\ \delta N = -\bar{N}\, d\, \delta p$

$$= \overline{dN}\ \delta p - d(\bar{N}\delta p)$$

$$= -\overline{dp} C\pi \delta p - \overline{dp}\ \frac{\partial \bar{N}\delta p}{\partial p}$$

$$\text{donc} \quad \delta N = -C\pi\ \delta p - \overline{\frac{\partial \bar{N}\delta p}{\partial p}}$$

1,4,2 - Les champs $x \mapsto G = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\ \frac{\partial p}{\partial x}$ et $x \mapsto F = -\overline{\frac{\partial N}{\partial x}}\ \frac{\partial p}{\partial x}$ de matrices des

deux formes quadratiques fondamentales dépendent différentiablement du paramètre u. Plus précisément, les applications $(u,x) \mapsto G_u$ et $(u,x) \mapsto F_u$ sont différentiables. Les variations de G et F dans le déplacement virtuel $p \mapsto \delta p$ sont :

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial u}\Big|_{u=0} \qquad \text{et} \qquad \delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=0}$$

Proposition : δG et δF ne dépendent que du champ $p \mapsto \delta p$.

On a :

$$\delta G = G\, S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p}} - 2\, \bar{N}\, \delta p\, C \right] S$$

$$\delta F = F\, S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p} - \bar{N}\, \delta p\, C \right] S - G\, S^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial}\delta N}{\partial p}}\, S$$

En effet $\delta G = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial x}} \frac{\partial p}{\partial x} = \bar{S} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \overline{\bar{S} \frac{\partial \delta p}{\partial x}}$

et $\bar{S} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = \bar{S} \frac{\partial \delta p}{\partial p} S = \bar{S} \left[\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p} - \bar{N}\delta p\, C \right] S$ et $\bar{S} = G\, S^{-1}$

$$\delta F = - \overline{\frac{\partial N}{\partial x}} \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \overline{\frac{\partial \delta N}{\partial x}} \frac{\partial p}{\partial x} = - \overline{\frac{\partial N}{\partial x}} \frac{\partial \delta p}{\partial p} S - \overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \overline{\frac{\partial \delta N}{\partial p}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$= - \overline{\frac{\partial N}{\partial x}} \left[\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p} - \bar{N}\, \delta p\, C \right] S - \bar{S} \left[\overline{\frac{\hat{\partial}\delta N}{\partial p}} \right] S$$

$$= F\, S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial}\pi\delta p}{\partial p} - \bar{N}\, \delta p\, C \right] S - G\, S^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial}\delta N}{\partial p}}\, S$$

2 - Sur la forme d'une surface matérielle.

2,1 - Définitions.

2,1,1 - Une surface matérielle est la donnée de :

1°) Une variété v de dimension 2, à bord γ et à coins q_1, q_2, q_3..., plongeable dans R^3. Ses points sont appelés molécules.

2°) Un ensemble $\mathcal{E}$ de plongements (applications différentiables, injectives, de rang 2) de v dans R^3. $\mathcal{E}$ est une classe d'isotopie de l'espace des plongements : si $\phi_1 \in \mathcal{E}$ et $\phi_2 \in \mathcal{E}$, il existe $\Phi : [0,1] \times v \to R^3$ qui soit différentiable et telle que :

$$\Phi(0,X) = \phi_1(X)\ ,\ \Phi(1,X) = \phi_2(X) \qquad \forall\, X \in v$$

$$\Phi(t,X) = \phi_t(X) \Rightarrow \phi_t \text{ est un plongement}$$

Tout plongement qui est l'extrémité d'un tel chemin, d'origine dans , est dans .

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des configurations de la surface matérielle.

Si X est une molécule et ϕ une configuration, $p = \phi(x)$ est la position (dans R^3) de la molécule dans cette configuration.

R^3 est muni de son produit scalaire canonique, et orienté. v est muni d'une orientation, ce qui oriente le vecteur normal dans chaque configuration.

Etant données deux configurations ϕ_1 et ϕ_2, le difféomorphisme $\Psi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ de $\mathcal{S}_1 = \phi_1(v)$ sur $\mathcal{S}_2 = \phi_2(v)$ est un changement de configuration. Il applique $P_1 = \phi_1(X)$ en $p_2 = \phi_2(X)$.

Un difféomorphisme de R^3 a pour restriction sur $\mathcal{S}_1$ un changement de configuration. En particulier, le groupe des isométries de R^3 opère sur $\mathcal{C}$.

2,1,2 - La forme d'une surface matérielle dans la configuration ϕ est l'orbite de ϕ par le groupe des isométries de R^3.

En d'autres termes, deux configurations ont même forme s'il existe une isométrie A de R^3 qui prolonge le changement de configuration ψ ($A = \psi$ sur $\mathcal{S}_1$).

Soit f une carte de v, $\phi_1 \circ f = f_1$ et $\phi_2 \circ f = f_2$ sont des cartes respectivement de $\mathcal{S}_1 = \phi_1(v)$ et de $\mathcal{S}_2 = \phi_2(v)$.

Deux telles cartes sont dites associées : les positions p_1 et p_2 d'une même molécule X sont repérées par la même valeur x du paramètre dans R^2.

Désignons par G_1 et G_2, F_1 et F_2 les matrices des première et deuxième formes quadratiques fondamentales, en X, de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

2,1,3 - Théorème : Pour que deux configurations aient même forme, il est nécessaire et suffisant que pour tout X du domaine de définition de deux cartes associées f_1 et f_2 on ait $G = G_1$ et $F = F_1$.

1°) Supposons que les deux configurations ϕ_1 et ϕ_2 aient même forme. Il existe

une isométrie de l'espace qui applique $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$. Soit U la rotation ($\bar{U}\,U = U\,\bar{U} = \mathbf{1}$)

On a $U = \dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}$ sur $Tp_1(\mathcal{S}_1)$ soit $\dfrac{\partial p_2}{\partial x} = U \dfrac{\partial p_1}{\partial x}$

et $N_2 = U\,N_1$ donc $\dfrac{\partial N_2}{\partial x} = U \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$

Alors $G_2 = \dfrac{\overline{\partial p_2}}{\partial x}\dfrac{\partial p_2}{\partial x} = \dfrac{\overline{\partial p_1}}{\partial x}\bar{U}\,U\dfrac{\partial p_1}{\partial x} = G_1$

et $F_2 = -\dfrac{\overline{\partial N_2}}{\partial x}\dfrac{\partial p_2}{\partial x} = -\dfrac{\overline{\partial N_1}}{\partial x}\bar{U}\,U\dfrac{\partial p_1}{\partial x} = F_1$

2°) Supposons que $G_2 = G_1$ et $F_2 = F_1$ pour tout x du domaine Ω de définition commun de deux cartes associées f_2 et f_1.

Alors pour tout x de ce domaine, on considère l'application linéaire

$U : R^3 \to R^3$ définie par :

$$U = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} \quad \text{sur } Tp_1(\mathcal{S}_1)$$

$$U\,N_1 = N_2$$

$\forall\, V_1 \in R^3$, $\exists\, dp_1 \in Tp_1(\mathcal{S}_1)$ et $a \in R$ tels que $V_1 = dp_1 + a\,N_1$.

Alors $V_2 = U\,V_1 = U(dp_1 + a\,N_1) = dp_2 + a\,N_2$

et $\bar{V}_2 V_2 = \bar{V}_1 \bar{U}\,U\,V_1 = (\overline{dp_2} + a\,\overline{N_2})(dp_2 + a\,N_2) = \overline{dp_2}\,dp_2 + a^2 \bar{N}_2 N_2$

$= \overline{dx}\,G_2\,dx + a^2 = \overline{dx}\,G_1\,dx + a^2 = \overline{dp_1}\,dp_1 + a^2 \bar{N}_1 N_1$

$= (\overline{dp_1} + a\,\bar{N}_1)(dp_1 + a\,N_1) = \bar{V}_1\,V_1$

De $\bar{V}_1\,U\,U\,V_1 = \bar{V}_1\,V_1$ pour tout V_1 de R^3, on déduit $\bar{U}\,U = 1$. Le champ $x \mapsto U$ est un champ de rotations de R^3. Il reste à montrer qu'il est constant.

$x \mapsto U$ est différentiable (car $x \mapsto \dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}$, $x \mapsto N_1$ et $x \mapsto N_2$ le sont).

Soit $x \mapsto V_1$ un champ de vecteurs de R^3 défini sur $\Omega \subset R^2$. Considérons le champ $x \mapsto V_2$ défini par $V_2 = U\,V_1$.

En dérivant par rapport à x, on obtient : $\underline{\delta V_2 = U.\delta V_1 + \delta U.V_1}$ $\quad \forall\, \delta x \in R^2$

Or $\delta V_2 = \delta(dp_2 + aN_2) = \hat{\delta}\,dp_2 + \overline{\delta p_2}\,C_2\,dp_2.N_2 + \delta a.N_2 - a\,C_2\,\delta p_2$ d'après le § 1,2,5.

Soit $\delta V_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x} [\delta dx + \Gamma_2(dx)(\delta x)] + [\overline{\delta x}\, F_2 dx + \delta a]\, N_2 - a C_2\, \delta p_2$

Or $\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = U \frac{\partial p_1}{\partial x}$

$\Gamma_2 = \Gamma_1$ car Γ ne dépend que du champ $x \mapsto G$

$F_2 = F_1$; $N_2 = U N_1$ et $C_2 \delta p_2 = U C_1 \delta p_1$

Cette dernière relation provient de :

$$C_1 \delta p_1 = -\delta N_1 = -\frac{\partial N_1}{\partial x} \delta x = -\left(\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x}}\right)^{-1} \overline{\frac{\partial p_1}{\partial x}} \frac{\partial N_1}{\partial x} \delta x = \left(\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x}}\right)^{-1} F_1 \delta x$$

$$C_2 \delta p_2 = \left(\overline{\frac{\partial p_2}{\partial x}}\right)^{-1} F_2 \delta x = \left(\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x}}\ \overline{U}\right)^{-1} \Gamma_2 \delta x = U \left(\overline{\frac{\partial p_1}{\partial x}}\right)^{-1} F_1 \delta x = U C_1 \delta p_1$$

On a donc :

$$\delta V_2 = U \left[\frac{\partial p_1}{\partial x} [\delta dx + \Gamma_1(dx)(\delta x)] + [\overline{\delta x}\, F_1 dx + \delta a]\, N_1 - a C_1 \delta p_1\right]$$

$$\underline{\delta V_2 = U\, \delta\, V_1}$$

Par conséquent $\delta U . V_1 = 0 \quad \forall\, V_1$ et $\forall\, \delta x$

d'où $\delta U = 0 \quad \forall\, \delta x$

Il existe donc une rotation de R^3, indépendante de x telle que :

$\frac{\partial p_2}{\partial p_1} = U$. D'où par quadrature $\overrightarrow{p'_2 p_2} = U\,(\overrightarrow{p'_1 p_1})$

Il existe une isométrie de R^3 qui applique $\mathscr{E}_1$ sur $\mathscr{E}_2$ en conservant les molécules.

2,2 - Déformations.

Considérons deux configurations ϕ et ϕ_o d'une surface matérielle dont l'une sera prise comme configuration de référence et affectée de l'indice zéro.

Le changeur de configuration $\Psi : p_o \mapsto p$, difféomorphisme de $\mathscr{E}_o$ sur $\mathscr{E}$ a pour application linéaire tangente $\frac{\partial p}{\partial p_o} = D(\Psi)(p_o)$; $\mathbb{G} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \frac{\partial p}{\partial p_o}$, application linéaire du plan tangent à $\mathscr{E}_o$ en p_o, est appelée conformation tangentielle en $p = \Psi(p_o)$ (de ϕ par rapport à ϕ_o). Ce tenseur mixte du

deuxième ordre de $T_{p_o}(\mathcal{S}_o)$ est représenté dans la base naturelle S_o de $T_{p_o}(\mathcal{S}_o)$, associée à une carte f par la matrice $G_o^{-1}\,G$:

$$\boxed{\mathbb{G} = S_o\,[G_o^{-1}\,G]\,S_o^{-1}}$$

$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbb{G} - 1_{T_{p_o}(\mathcal{S}_o)})$ est la <u>déformation tangentielle</u>.

Les opérateurs de courbures C_o et C opèrent respectivement sur $T_{p_o}(\mathcal{S}_o)$ et $T_p(\mathcal{S})$; cependant on peut comparer à C_o l'<u>image réciproque</u>
$C^* = \left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1} C \frac{\partial p}{\partial p_o}$ de C par ψ , ou encore $\boxed{\tilde{C} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\, C \frac{\partial p}{\partial p_o}}$

La <u>déformation des courbures</u> est le 2-tenseur mixte <u>symétrique</u> $\boxed{K = \tilde{C} - C_o}$

de $T_p(\mathcal{S}_o)$, représenté dans la base naturelle S_o par la matrice $G_o^{-1}[F-F_o]$:

$$\boxed{K = S_o G_o^{-1}\,[F-F_o]\,S_o^{-1}}$$

Il résulte donc du théorème (2,1,3) l'énoncé suivant :

<u>Théorème</u> : Pour qu'une configuration $\mathcal{S}$ ait même forme que la configuration de référence $\mathcal{S}_o$, il est nécessaire et suffisant que les champs de déformations $p_o \mapsto \Delta$ et $p_o \mapsto K$ soient nuls.

3 - <u>Relations de Gauss-Codazzi ; compatibilité des déformations</u>.

3,1 - <u>Courbure Riemannienne</u>.

Le tenseur, en p, de courbure Riemannienne est défini par :

$$R : T_p(\mathcal{S}) \times Tp(\mathcal{S}) \to L(Tp(\mathcal{S}))$$

$$\boxed{R(dp)(\delta p)\,V = \hat{d}\left(\frac{\tilde{\partial V}}{\partial p}\right)\delta p - \hat{\delta}\left(\frac{\hat{\partial V}}{\partial p}\right) dp}$$

Il résulte, en effet, du calcul de l'expression locale, que $R(dp)(\delta p)\,V$ ne dépend que des valeurs en p des champs de vecteurs tangents $p \mapsto dp$, $p \mapsto \delta p$ et $p \mapsto V$.

Dans une carte $x \mapsto p$, à laquelle est associée le champ de bases naturelles

$x \mapsto S$, on a :

$$R(dp)(\delta p) = S([\Gamma(dx),\Gamma(\delta x)] + d\Gamma(\delta x) - \delta\Gamma(dx))S^{-1}$$

(avec $[A,B] = AB-BA$)

R vérifie les relations d'antisymétrie :

$$\begin{cases} R(dp)(\delta p) + R(\delta p)(dp) = 0 \\ \overline{R(dp)(\delta p)} + R(dp)(\delta p) = 0 \end{cases}$$

3,2 - Relations de Gauss-Codazzi.

Rappelons que le champ $p \mapsto C$ d'opérateurs de courbure est défini par l'application linéaire tangente au champ de vecteurs unitaires normaux $p \mapsto N$ (au signe près) ; on a : $dN + Cdp = 0$ et $\overline{C} = C$; det C est la courbure gaussienne.

Théorème (Gauss-Codazzi) : Quels que soient dp et δp tangents, on a :

$$\hat{d}C.\delta p - \hat{\delta}C.dp = 0 \qquad (1)$$

$$R(dp)(\delta p) + \det C.\Sigma.\sigma(dp)(\delta p) = 0 \qquad (2)$$

Soit $p \mapsto W = V + uN$ un champ de vecteurs de R^3, défini sur $\mathcal{S}$, de composante tangentielle $p \mapsto V$ et de composante normale $p \mapsto uN$ on a :

$$dW = \left(\frac{\hat{\partial V}}{\partial p} - uC \right) dp + N \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \overline{V}\, C \right) dp$$

Si W est constant dans R^3, alors $\frac{\partial W}{\partial p} = 0$, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial p} + \overline{V}\, C = 0 \qquad \frac{\hat{\partial V}}{\partial p} - u\, C = 0$$

On en déduit :

$$\hat{d}\left(\frac{\hat{\partial V}}{\partial p} \right) \delta p - \hat{\delta}\left(\frac{\hat{\partial V}}{\partial p} \right) dp = \hat{d}(uC)\, \delta p - \hat{\delta}(uC)\, dp$$

$$= du C \delta p - \delta u C dp + u(\hat{d}C\delta p - \hat{\delta}C dp)$$

soit : $R(dp)(\delta p)\, V = -\overline{V}(Cdp.C\delta p - C\delta p.Cdp) + u(\hat{d}C.\delta p - \hat{\delta}C dp)$

Les valeurs de u et V sont quelconques en p. D'où :

$$\hat{d}C.\delta p - \hat{\delta}C.dp = 0$$

$$R(dp)(\delta p)\, V = V \wedge (Cdp \wedge C\delta p) \quad \text{(formule du double produit vectoriel)}$$

$$= V \wedge (N\sigma(Cdp)(C\delta p))$$

$$= V \wedge N.\det C.\sigma(dp)(\delta p)$$

$$= -\det C.\sigma(dp)(\delta p)\ \Sigma\ V$$

Propositions.

1) La relation (1) de Codazzi exprime la symétrie de la dérivée covariante C' : $Tp(\mathcal{S}) \to L(Tp(\mathcal{S}))$ de l'opérateur de courbure.

On peut également écrire : $\boxed{\text{Rot } C = 0}$ (1')

2) La relation (2) peut également être écrite :

$$\boxed{\text{Rot}\left(\frac{\widehat{\overline{\partial V}}}{\partial p}\right) = \det C.\overline{V}\ \Sigma} \quad (2')$$

3) Dans une carte $(x_1,x_2) \mapsto p$ dont les lignes de coordonnées sont les lignes de courbures, les matrices G et $G^{-1}F$ sont diagonales :

$$G = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad G^{-1}F = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

(ρ_1 et ρ_2 sont les courbures principales). Les relations de Gauss-Codazzi deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_2}(a_1\rho_1) = \rho_2 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial}{\partial x_1}(a_2\rho_2) = \rho_1 \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \rho_1\rho_2 + \dfrac{1}{a_1a_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Les propositions (1) et (2) résultent immédiatement de la définition du rotationnel.

Pour établir la proposition (3), remarquons qu'en utilisant (1,3,3) on montre que :

$$\begin{cases} (1) \iff [d(G^{-1}F) + \Gamma(dx)G^{-1}F]\delta x - [\delta(G^{-1}F) + \Gamma(\delta x)G^{-1}F]\,dx = 0 \quad (\forall dx,\delta x \in R^2) \\ (2) \iff ([\Gamma(dx),\Gamma(\delta x)] + d\Gamma(\delta x) - \delta\Gamma(dx))G^{-1} = \det(G^{-1}F)(dx\overline{\delta x} - \delta x\ \overline{dx}) \end{cases}$$

Le calcul de Γ résulte du théorème (1,2,2). On obtient :

$$\Gamma\binom{1}{0} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{a_1}{a_2^2}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \qquad \Gamma\binom{0}{1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & -\dfrac{a_2}{a_1^2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

En calculant $[d(G^{-1}F) + \Gamma(dx)G^{-1}F]\delta x$ pour $dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\delta x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis pour $dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on déduit les deux premières relations cherchées de l'égalité des résultats.

En calculant la deuxième relation ci-dessus avec $dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\delta x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient la dernière relation cherchée.

3,3 - Relations de compatibilité des déformations.

3,3,1 - Connexion et courbure d'un changeur de configurations.

Etant donné $\psi : p_o \mapsto p$ un changeur de configurations (cf. 2,1,1) dont $\frac{\partial p}{\partial p_o} : Tp_o(\mathcal{S}_o) \to Tp(\mathcal{S})$ est l'application linéaire tangente.

Soient $p_o \mapsto V_o$ un champ de vecteurs tangents sur $\mathcal{S}_o$ et $p \mapsto V$ son image sur $\mathcal{S}$, la différence entre l'image réciproque par $(p_o \mapsto p)$ de $\frac{\hat{\partial} V}{\partial p}$ et $\frac{\partial V_o}{\partial p_o}$ ne dépend que de la valeur V_o en p_o du champ donné :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1} \frac{\hat{\partial} V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_o} - \frac{\partial V_o}{\partial p_o} = S_o S_o^{-1}.S\left[\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma(Y)\right]S^{-1}.S\, S_o^{-1} - S_o\left[\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma_o(Y)\right]S_o^{-1}$$

$$= S_o[\Gamma(Y) - \Gamma_o(Y)]S_o^{-1} \qquad (\text{où } V_o = S_o Y \text{ et } V = SY)$$

Définition 1 : La connexion Riemannienne du changeur de configurations $(p_o \to p)$ est le tenseur $\mathcal{D}$ en p_o, défini par :

$\mathcal{D} : Tp_o(\mathcal{S}_o) \to L(Tp_o(\mathcal{S}_o))$

$\mathcal{D}(V_o) = \left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1} \frac{\hat{\partial} V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_o} - \frac{\partial V_o}{\partial p_o}$ ($\forall (p_o \mapsto V_o)$ tangent, et avec $V = \frac{\partial p}{\partial p_o} V_o$)

$\mathcal{D}(V_o)$ a pour expression la différence des connexions $[\Gamma - \Gamma_o](Y)$ dans deux cartes associées.

On a donc $\hat{d}\delta p = \frac{\partial p}{\partial p_o}[\hat{d}\delta p_o + \mathcal{D}(dp_o)(\delta p_o)]$ ce qui équivaut à poser

$$\hat{d}\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right) = \frac{\partial p}{\partial p_o}\mathcal{D}(dp_o)$$

La symétrie de $\mathcal{D}$ résulte de celle des opérateurs de Christoffel :

$$\mathcal{D}(dp_o)(\delta p_o) = \mathcal{D}(\delta p_o)(dp_o)$$

Théorème 1 : La connexion en p_o du changeur de configurations ne dépend que du champ de déformations $p_o \mapsto \Delta$ (ou de conformations tangentielle $p_o \mapsto G = 1 + 2\Delta$). C'est l'unique solution du système :

$$\boxed{\begin{aligned} d\,\mathbb{G} &= \mathbb{G}\,\mathcal{D}(dp_o) + \overline{\mathcal{D}(dp_o)}\,\mathbb{G} \\ \mathcal{D}(dp_o)(\delta p_o) &= \mathcal{D}(\delta p_o)(dp_o) \end{aligned}}$$

La démonstration de ce résultat est formellement identique à celle du théorème (1,2,2).

Définition 2 : La courbure Riemannienne du changeur de configurations $p_o \mapsto p$ est le tenseur $\mathcal{R}$, en p_o, différence entre l'image réciproque de la courbure R (en $p \in$ ') par $(p_o \mapsto p)$ et la courbure R_o (en $p_o \in$ ') :

$$\mathcal{R} : T_{p_o}(\ ) \times T_{p_o}(\ ) \to T_{p_o}(\ )$$

$$\mathcal{R}(dp_o)(\delta p_o) = \left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1} R\left(\frac{\partial p}{\partial p_o} dp_o\right)\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\delta p_o\right)\frac{\partial p}{\partial p_o} - R_o(dp_o)(\delta p_o)$$

Théorème 2 : La courbure en p_o du changeur de configurations ne dépend que du champ de déformations $p_o \mapsto \Delta$ (ou de conformations $p_o \mapsto \mathbb{G}_o$). Son expression en fonction de la connexion est :

$$\boxed{\mathcal{R}(dp_o)(\delta p_o) = [\ (dp_o), (\delta p_o)] + \hat{d}\ (\delta p_o) - \hat{\delta}\ (dp_o)}$$

$\hat{d}\,\mathcal{D}$ est la dérivée covariante suivant le champ de vecteurs tangents $p_o \mapsto dp_o$ du champ de tenseurs $p_o \mapsto \mathcal{D}$; elle est définie par :

$$\hat{d}\,\mathcal{D}(\delta p_o) = \hat{d}(\mathcal{D}(\delta p_o)) - \mathcal{D}(\hat{d}\delta p_o).\ \forall\ (p_o \mapsto \delta p_o) \text{ tangent.}$$

Posons $dp = \frac{\partial p}{\partial p_o}\, dp_o$, $\delta p = \frac{\partial p}{\partial p_o}\,\delta p_o$ et $V = \frac{\partial p}{\partial p_o}\, V_o$; on a :

$$\mathcal{R}(dp_o)(\delta p_o)\, V_o = \left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1} R(dp)(\delta p)\, V - R_o(dp_o)(\delta p_o) V_o$$

$$\text{Or } \hat{d}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \hat{d}\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\left(\frac{\partial V_o}{\partial p_o} + \mathcal{D}(V_o)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1}\right)$$

$$= \frac{\partial p}{\partial p_o}\left\{\hat{d}\left(\frac{\partial V_o}{\partial p_o}\right) + \mathcal{D}(dp_o)\left(\frac{\partial V_o}{\partial p_o} + \mathcal{D}(V_o)\right) - \left(\frac{\partial V_o}{\partial p_o} + \mathcal{D}(V_o)\right)\mathcal{D}(dp_o)\right.$$

$$\left. + \hat{d}\,\mathcal{D}(V_o) + \mathcal{D}(\hat{d}V_o)\right\}\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right)^{-1}$$

$$\text{d'où } \hat{d}(\frac{\hat{\partial}V}{\partial p})\delta p - \hat{\delta}(\frac{\hat{\partial}V}{\partial p})dp = \frac{\partial p}{\partial p_o}\left\{\hat{d}(\frac{\hat{\partial}V_o}{\partial p_o})\delta p_o - \hat{\delta}(\frac{\hat{\partial}V_o}{\partial p_o})\, dp_o + [\mathfrak{D}(dp_o), \mathfrak{D}(\delta p_o)]\right.$$

$$\left. + \hat{d}\,\mathfrak{D}(\delta p_o) - \hat{\delta}\,\mathfrak{D}(dp_o)\right\} V_o,$$

$$\text{et } (\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} R(dp)(\delta p)V = R_o(dp_o)(\delta p_o)V_o + \{[\mathfrak{D}(dp_o), \mathfrak{D}(\delta p_o)] + \hat{d}\mathfrak{D}(\delta p_o) - \hat{\delta}\,\mathfrak{D}(dp_o)\}\, V_o$$

$$(\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} R(dp)(\delta p)\,\frac{\partial p}{\partial p_o} - R_o(dp_o)(\delta p_o) = [\mathfrak{D}(dp_o), \mathfrak{D}(\delta p_o)] + \hat{d}\mathfrak{D}(\delta p_o) - \hat{\delta}\,\mathfrak{D}(dp_o)$$

3,3,2 - Compatibilité des déformations.

Théorème : Le champ de conformation tangentielle $p_o \mapsto \mathbb{G}$, le champ d'opérateurs de courbure $p_o \mapsto C_o$ et le champ $p_o \mapsto \tilde{C}$ ($\tilde{C} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\, C\, \frac{\partial p}{\partial p_o}$) vérifient:(7)

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}(\tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1})\mathbb{G} + \mathrm{Rot}(\tilde{C}) = \mathrm{Rot}\mathbb{G}.\mathrm{Adj}(\tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}) \\ \mathcal{R}(dp_o)(\delta p_o) + [\det(\tilde{C}).G^{-1} - \det C_o]\,\Sigma_o.\sigma(dp_o)(\delta p_o) = 0 \end{cases}$$

La seconde relation résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{R}$ et du théorème de Gauss (cf.3,2) :

$$\mathcal{R}(dp_o)(\delta p_o) = (\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} R(\frac{\partial p}{\partial p_o}\, dp_o)(\frac{\partial p}{\partial p_o}\delta p_o).\frac{\partial p}{\partial p_o} - R_o(dp_o)(\delta p_o)$$

$$= -\det C.(\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1}\Sigma\,\frac{\partial p}{\partial p_o}.\sigma(dp)(\delta p) + \det C_o.\Sigma_o.\sigma(dp_o)(\delta p_o)$$

On déduit la relation cherchée de :

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\,\Sigma\,\frac{\partial p}{\partial p_o} = \sqrt{\det \mathbb{G}}\,\Sigma_o \quad ; \quad \sigma(dp)(\delta p) = \sqrt{\det \mathbb{G}}\,\sigma(dp_o)(\delta p_o)$$

$$(\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} = \mathbb{G}^{-1}\,\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \qquad \text{et} \qquad \det(\tilde{C}) = \det(C).\det(\mathbb{G})$$

La première relation équivaut à Rot C = 0 sur $\mathcal{S}$ (sachant que Rot C_o = 0 sur $\mathcal{S}_o$):

1°) $(\mathrm{Rot}\,\mathbb{G}.V)\Sigma_o = \mathbb{G}\mathfrak{D}(V) - \overline{\mathfrak{D}(V)}\mathbb{G} \qquad (\forall\, V \in T_{p_o}(\mathcal{S}))$

$$\mathrm{Rot}\,\mathbb{G}.\sigma(dp_o)(\delta p_o) = \overline{\delta p_o}\,\hat{d}\mathbb{G} - \overline{dp_o}\,\hat{\delta}\,\mathbb{G}$$

$$= \overline{\delta p_o}[\mathbb{G}\mathfrak{D}(dp_o) + \overline{\mathfrak{D}(dp_o)}\mathbb{G}] - \overline{dp_o}[\mathbb{G}\mathfrak{D}(\delta p_o) + \overline{\mathfrak{D}(\delta p_o)}\mathbb{G}]$$

(7) Soit $A \in L(T_p(\mathcal{S}))$, Adj A = $-\Sigma\, A\, \Sigma$. On a : A.Adj A = Adj A.A = det A (notons que $\Sigma\, A\, \Sigma\, A = \det A.\Sigma$)
Adj A intervient dans la formule de Jacobi de dérivation d'un déterminant : d(det A) = Tr(Adj A.dA).

et compte tenu de la symétrie de $\mathcal{D}$:

$$(\text{Rot } \mathbb{G}.V)\ \overline{\delta p_o}\ \Sigma_o dp_o = \overline{\delta p_o}\ \mathbb{G}\ \mathcal{D}(V)\ dp_o - \overline{dp_o}\ \mathbb{G}\ \mathcal{D}(V)\ \delta p_o$$
$$= \overline{\delta p_o}\ [\mathbb{G}\ \mathcal{D}(V) - \overline{\mathcal{D}(V)}\mathbb{G}]\ dp_o$$

2°) $\underline{\text{Rot } C.\sigma(dp_o)(\delta p_o) = \overline{\delta p_o}\ \tilde{C}\ \mathcal{D}(dp_o) - \overline{dp_o}\ \tilde{C}\ \mathcal{D}(\delta p_o).}$

(ce qu'on peut écrire : $(\text{Rot } \tilde{C}.V)\Sigma_o = \tilde{C}\,\mathcal{D}(V) - \overline{\mathcal{D}(V)}\tilde{C} \quad (\forall\ V)$)

$$\text{Rot } \tilde{C}.\sigma(dp_o)(\delta p_o) = \overline{\delta p_o}\ \hat{d}\ \tilde{C} - \overline{dp_o}\ \hat{\delta}\tilde{C} = \overline{\delta p_o}\ \hat{d}\left[\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\ C\ \frac{\partial p}{\partial p_o}\right] - \overline{dp_o}\ \hat{\delta}\left[\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\ C\ \frac{\partial p}{\partial p_o}\right]$$

Et, compte tenu de $\hat{d}\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right) = \frac{\partial p}{\partial p_o}\mathcal{D}(dp_o)$, on obtient :

$$\text{Rot } \tilde{C}.\sigma(dp_o)(\delta p_o) - \text{Rot } C.\frac{\partial p}{\partial p_o}\sigma(dp)(\delta p) = \overline{\delta p_o}\ \tilde{C}\ \mathcal{D}(dp_o) - \overline{dp_o}\ \tilde{C}\ \mathcal{D}(\delta p_o)$$

La relation ci-dessus est donc équivalente à Rot C = 0.

Donnons une deuxième relation équivalente à Rot C = 0 qui nous permettra d'éliminer $\mathcal{D}$:

3°) $\underline{\text{Rot}(\tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1})\sigma(dp_o)(\delta p_o) = \overline{dp_o}\ \tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}\,\overline{\mathcal{D}(\delta p_o)} - \overline{\delta p_o}\ \tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}\ \overline{\mathcal{D}(dp_o)}}$

On établit cette relation comme la précédente en utilisant

$\hat{d}\,\mathbb{G} = \mathbb{G}\mathcal{D}(dp) + \overline{\mathcal{D}(dp_o)}\ \mathbb{G}$.

4°) Enfin, en utilisant : $\mathcal{D}(V)\mathbb{G}^{-1} - \mathbb{G}^{-1}\,\overline{\mathcal{D}(V)} = (\text{Rot } \mathbb{G}.V)\ \mathbb{G}^{-1}\ \Sigma_o \mathbb{G}^{-1}$ (cf.1°)

et $\quad dp_o\overline{\delta p_o} - \delta p_o\overline{dp_o} = -\ \Sigma_o\ \sigma(dp_o)(\delta p_o)$

on obtient :

$$\text{Rot}(\tilde{C}).\mathbb{G}^{-1} + \text{Rot}(\tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1})\ \sigma(dp_o)(\delta p_o) = \text{Rot } \mathbb{G}.[dp_o\overline{\delta p_o} - \delta p_o\overline{dp_o}]\ \tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}\ \Sigma_o\ \mathbb{G}^{-1}$$
$$= -\text{Rot } \mathbb{G}.\Sigma_o\ \tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}\Sigma_o\ \mathbb{G}^{-1}\sigma(dp_o)(\delta p_o)$$
$$= \text{Rot } \mathbb{G}.\text{Adj}(\tilde{C}\,\mathbb{G}^{-1}).\mathbb{G}^{-1}\sigma(dp_o)(\delta p_o)$$

d'où la relation cherchée.

3,4 - Compatibilité des petites déformations.

Les équations de compatibilité de la théorie des petites déformations sont obtenues en linéarisant les relations de compatibilité ci-dessus, par rapport à la déformation tangentielle Δ, sans aucune

hypothèse sur la déformation des courbures K.

Théorème : Dans l'approximation des petites déformations le champ de déformation tangentielle $p_o \mapsto \Delta$ et le champ de déformation des courbures $p_o \mapsto K$ sont liés par :

$$\begin{cases} \text{rot } \overline{\text{Rot } \Delta} + \text{Tr (Adj C.[K - C } \Delta]) = 0 \\ \text{Rot(K - C } \Delta) = \text{Rot } \Delta . \text{ adj C.} \end{cases}$$

1°) De (3,3,1 - Théorème 1) et (3,3,2 - 1°) on déduit :

$2\hat{d}\Delta = \mathfrak{D}(dp_o) + \overline{\mathfrak{D}(dp_o)}$ et $2(\text{Rot } \Delta . dp_o)\,\Sigma_o = \mathfrak{D}(dp_o) - \overline{\mathfrak{D}(dp_o)}$

et par conséquent : $\mathfrak{D}(dp_o) = \hat{d}\Delta + (\text{Rot } \Delta . \delta p_o)\,\Sigma_o$

Par suite, $[\mathfrak{D}(dp_o), \mathfrak{D}(\delta p_o)]$ est négligeable dans le calcul de $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o) = d\,\mathfrak{D}(\delta p_o) - \delta\,\mathfrak{D}(dp_o) \qquad \text{(th.2 § 3,3,1).}$$

2°) Dans l'approximation des petites déformations $\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o)$ est antisymétrique :

$$\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o) + \overline{\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o)} = (\frac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} R(dp)(\delta p)\,\frac{\partial p}{\partial p_o} + \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_o}\,\overline{R(dp)(\delta p)}\,(\frac{\overline{\partial p}}{\partial p_o})^{-1}$$

(car $R_o(dp_o)(\delta p_o)$ est antisymétrique : cf. § 3,1).

Or $\dfrac{\overline{\partial p}}{\partial p_o}\,\dfrac{\partial p}{\partial p_o} = 1 + 2\,\Delta \Rightarrow \dfrac{\overline{\partial p}}{\partial p_o} = (\dfrac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} + 2\,\Delta(\dfrac{\partial p}{\partial p_o})^{-1} \sim (\dfrac{\partial p}{\partial p_o})^{-1}$

3°) On déduit alors du théorème (3,3,2) et de $\|\Delta\| \ll 1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o) - \overline{\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o)} &= -2(\det \tilde{C} - \det C_o)\,\Sigma_o\,\sigma(dp_o)(\delta p_o) \\ &= -2\,\text{Tr(Adj C [K-C } \Delta])\,\Sigma_o \sigma(dp_o)(\delta p_o) \end{aligned}$$

4°) En différenciant l'expression trouvée de Rot Δ, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rot } \overline{\text{Rot } \Delta}\,\sigma(dp_o)(\delta p_o) &= \hat{d}(\text{Rot } \Delta)\delta p_o - \hat{\delta}(\text{Rot } \Delta)dp_o \\ &= d(\text{Rot}\Delta\ \delta p_o) - \delta(\text{Rot } \Delta\ dp_o) - \text{Rot } \Delta(\hat{d}\delta p_o - \hat{\delta} dp_o) \\ &= \frac{1}{2}[\overline{\hat{d}\ \mathfrak{D}(\delta p_o) - \hat{\delta}\ \mathfrak{D}(dp_o)}]\,\Sigma_o - \frac{1}{2}\,[\hat{d}\ \mathfrak{D}(\delta p_o) - \hat{\delta}\ \mathfrak{D}(dp_o)]\,\Sigma_o \\ &= \frac{1}{2}\,[\overline{\mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o)} - \mathfrak{R}(dp_o)(\delta p_o)]\,\Sigma_o \\ &= -\text{Tr(Adj C.[K-C } \Delta])\sigma(dp_o)(\delta p_o) \end{aligned}$$

5°) La linéarisation de la première relation de compatibilité est immédiate :

$$\mathrm{Rot}((K+C_o)(1-2\Delta)) + \mathrm{Rot}(K+C_o) = 2\ \mathrm{Rot}\ \Delta .\ \mathrm{Adj}(K+C_o)$$

$$2(\mathrm{Rot}\ K - \mathrm{Rot}(C\Delta)) = 2\ \mathrm{Rot}\ \Delta\ .\ \mathrm{Adj}\ C.$$

CHAPITRE 2 - COQUES MINCES CONSERVATIVES.

1 - Milieux continus conservatifs à deux dimensions.

Un milieu continu conservatif à deux dimensions, simple est la donnée de :

1°) Une surface matérielle, c'est à dire (cf. ch.1-2,1,1) :

a) Une variété v de dimension 2 plongeable dans R^3 (il suffit qu'elle soit orientable).

b) Un ensemble $\mathcal{C}$ de plongements de v dans R^3 : les configurations de la surface matérielle.

2°) Une énergie de déformation, application qui à toute configuration : $v \to R^3$ fait correspondre un champ scalaire $E : v \to R$, de densité superficielle d'énergie.

a) Principe de localisation :

L'application $\phi \to E$ a le caractère local : si ϕ_1 et ϕ_2 coïncident sur un ouvert contenant la molécule x, alors $E_1(X) = E_2(X)$. L'énergie de déformation totale est $W = \int_v E(X)\, dv$.

b) Invariance par isométrie :

Si ϕ_1 et ϕ_2 ont même forme alors $E_1 = E_2$.

Suivant cette définition, un milieu continu est conservatif. Cependant, pour un milieu non conservatif, la théorie que nous allons développer permet le calcul des contraintes dues aux déformations auxquelles il conviendrait d'ajouter les contraintes d'autres origines (viscosité...). Nous montrerons,au chapitre 4, que les équations que nous allons obtenir restent valables pour les coques non conservatives. En restant dans l'étude des efforts dus aux déformations, on peut étudier des milieux complexes pour lesquels une configuration est la donnée d'une configuration de la surface matérielle et de divers champs tels que :

Milieux soumis à des compressions :

Une configuration est un couple (ϕ,h) où $\phi : v \to R^3$ est un plongement de v dans R^3, et $h : \phi(v) \to R$ est le champ d'épaisseur.

Nous étudierons au § 2,3 de ce chapitre les modifications que cette hypothèse implique dans les équations.

Milieux à deux dimensions de Cosserat :

Une configuration est un couple (ϕ, T) où T est un champ de bases orthonormées (cf. chapitre 4).

Dans le même cadre, nous étudierons les milieux soumis à des liaisons internes (chapitre 4) pour lesquels l'ensemble des configurations est restreint par une condition portant sur la forme.

Nous appellerons coque élastique un milieu continu simple ou compressé tel que :

> Les efforts au bord de tout morceau de la coque sont de nature classique ; ils se traduisent par des forces et des couples de flexion et de torsion.

Cette dernière hypothèse restreint considérablement l'expression de l'énergie de déformation et élimine des déformations et contraintes " d'ordre supérieur " sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 4.

2 - Coques minces conservatives.

2,1 - Energie de déformation.

Si l'on note α_p la valeur en p ($p \in \mathcal{S} = \phi(v)$) de l'énergie spécifique de déformation, dans une configuration ϕ, l'énergie de déformation est $W = \int_{\mathcal{S}} \alpha_p \, d\mathcal{S}$.

En ne considérant qu'un morceau de surface, domaine $f(\Omega)$ d'une carte f définie sur $\Omega \subset R^2$, l'énergie de déformation du morceau est

$$W = \int_{\Omega} \sqrt{\det G}\, \alpha_x \, d\Omega$$

Il résulte de nos hypothèses et du théorème 2,2 du chapitre 1, que la valeur $\alpha_x = \alpha_p$ de l'énergie spécifique en $p = f(x)$ ne dépend que du germe en x des champs $x \mapsto G$ et $x \mapsto F$ (c'est à dire des champs de matrices des deux formes quadratiques dans un voisinage de x, aussi petit soit-il).

La théorie des coques élastiques n'admet comme efforts au bord que des forces et des couples de torsion et de flexion. Il convient de préciser cet hypothèse par sa signification énergétique :

> Si le bord est encastré, les efforts au bord ont un travail virtuel nul pour tout déplacement virtuel $p \longmapsto \delta p$ respectant la liaison d'encastrement, c'est à dire vérifiant $\delta p = 0$ et $\delta N = 0$ sur le bord.

On sait, par exemple, que dans le théorie à trois dimensions des milieux continus conservatifs, si l'énergie spécifique de déformation dépend de la valeur au point de la dérivée première du champ de tenseurs de déformation, il apparait des efforts au bord qui ne respectent pas la condition ci-dessus : ce sont des efforts de type <u>capillaire</u> (et plus seulement élastique) dont le travail virtuel est l'intégrale sur le bord de termes en $\mathrm{div}(\delta p)$. Il est évident que "$\delta p = 0$ sur le bord" n'implique pas "$\mathrm{div}(\delta p) = 0$ sur le bord" (on peut voir [5] à ce sujet). Ici les circonstances sont analogues : il s'agit de restreindre la forme de l'énergie spécifique pour éliminer ce type "non classique" d'efforts au bord. La solution la plus générale n'est sans doute pas simple. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que bien que la présence des dérivées G', G" etc... dans l'expression de l'énergie spécifique implique en général, comme nous le verrons au chapitre 4, des efforts non classiques au bord, cela n'exclue pas que α_x dépende de G', G" ... par l'intermédiaire de fonctions convenables de G', G" ... ; nous verrons en effet que l'on peut admettre que α_x dépende de F (valeur en x de la 2° matrice fondamentale), donc de det F ; Or on sait (théorème de Gauss) que l'on peut exprimer la courbure totale det F en fonction de G,G' et G".

C'est un exercice d'intégrations par parties successives (que nous ne développerons pas ici) de montrer que la dépendance la plus générale de l'énergie spécifique α_x par rapport aux dérivées G', G",..., F', F", ... implique dans l'expression du travail virtuel δW dans un déplacement virtuel $p \longmapsto \delta p$ de la coque compatible avec la liaison d'encastrement, la présence de termes qui traduisent un travail généralement non nul des effort au bord.

Nous restreindrons donc nos hypothèses en posant :

$$\alpha = \beta\ (x, G, F)$$

Il nous reste à vérifier qu'une telle énergie est conforme aux hypothèses posées, en calculant explicitement l'expression générale des efforts.

Nous verrons que les développements impliqués incluent la théorie classique en particulier.

2,2 - Calcul des efforts. Relations contraintes-énergie-Efforts au bord.

2,2,1. En considérant un morceau de coque qui soit le domaine d'une carte définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, nous avons :

$$W = \int_\Omega \sqrt{\det G}.\ \alpha\, d\Omega$$

Nous nous proposons d'exprimer le travail virtuel $-\delta W$ des efforts comme fonctionnelle linéaire du déplacement virtuel $p \longmapsto \delta p$

Nous poserons $\delta p = Z + aN$ où Z est la composante tangentielle et aN la composante normale du déplacement virtuel.

Nous avons alors (cf. chapitre 1 - 1,4,1 et 1,4,2) :

$$\delta N = -(CZ + \overrightarrow{\frac{\partial a}{\partial p}})$$

et

$$\delta G = GS^{-1}\left[\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p} + \overrightarrow{\frac{\partial Z}{\partial p}} - 2aC\right] S$$

$$\delta F = FS^{-1}\left[\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p} - aC\right] S - GS^{-1}\ \overrightarrow{\frac{\hat{\partial}\delta N}{\partial p}}\ S$$

où S est la base naturelle associée à la carte.

Nous noterons $\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G}$ la matrice symétrique de composantes $\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial g_{ij}}$ et $\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F}$ la matrice symétrique de composantes $\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial f_{ij}}$

D'où $W = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G}\ \delta G + \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F}\ \delta F\right) d\Omega$

2,2,2. Définition :

Soient A et B les tenseurs mixtes du 2° ordre du plan tangent, représentés dans la base naturelle S par les matrices $\mathcal{A} = S^{-1}AS$ et $\mathcal{B} = S^{-1}BS$ suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left[2 \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G} G + \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F} F \right]$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F} G$$

(relations contraintes-énergie)

A est la contrainte superficielle.
B est la contrainte de couple.

N.B. : B est symétrique car $\overline{G\mathcal{B}} = G\mathcal{B}$ donc $\overline{\mathcal{B}} = G\mathcal{B}G^{-1}$ et par conséquent $\overline{B} = \overline{S\mathcal{B}S^{-1}} = \overline{S}^{-1}\overline{\mathcal{B}}\,\overline{S} = SG^{-1}\mathcal{B}\,GS^{-1} = S\mathcal{B}S^{-1} = B$

on montre de même que seul le premier terme de A est symétrique. Ces contraintes apparaissent dans l'expression suivante de la variation d'énergie :

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}} \left[\mathrm{Tr}\left(A \frac{\hat{\partial} Z}{\partial p}\right) - \mathrm{Tr}(AC)a - \mathrm{Tr}\left(B \frac{\hat{\partial} \delta N}{\partial p}\right) \right] d\mathcal{S}$$

En effet, $d\mathcal{S} = \sqrt{\det G}\, d\Omega$, et en utilisant la symétrie de B et du premier terme de A on obtient :

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G} \delta G\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G} G S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p}} - 2aC\right] S\right)$$

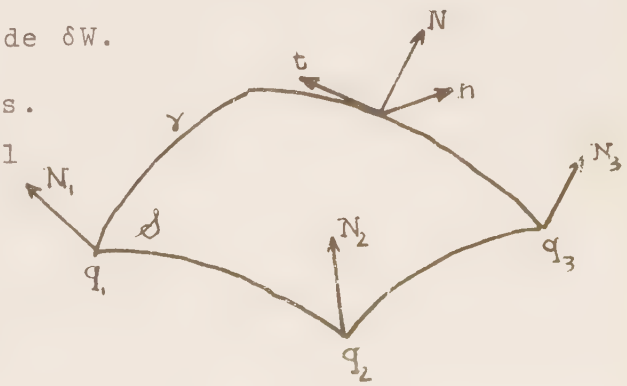
$$= \mathrm{Tr}\left(2 S \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G} G S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p} - aC\right]\right)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F} \delta F\right) = \mathrm{Tr}\left(S \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F} F S^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} Z}{\partial p} - aC\right]\right)$$

$$- \mathrm{Tr}\left(S \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial F} G S^{-1} \frac{\hat{\partial} \delta N}{\partial p}\right)$$

D'où l'expression cherchée de δW.

Soit γ le bord de $\mathcal{S}$ et q_i les coins. Notons n le vecteur unitaire normal à γ et tangent à $\mathcal{S}$, orienté positivement vers l'extérieur, et t le vecteur unitaire tangent à γ tel que (n,t,N) soit direct.



2,2,3 - Proposition

Dans le déplacement virtuel $p \longmapsto \delta p$, le travail virtuel des efforts est $\delta \mathcal{T} = -\delta W$ où :

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}} \overline{F}\ \delta p\ d\mathcal{S} + \int_{\gamma} \overline{f}\ \delta p\ d\gamma + \int_{\gamma} M\,\overline{n}\ \delta N\ d\gamma + \sum_i \overline{F_i}\ \delta q_i$$

ces efforts sont :

1°) Une densité superficielle de force F :

$$F = \left[-\overline{\text{Div } A} - C\ \overline{\text{Div } B}\right] + \left[\text{div}(\overline{\text{Div } B}) - \text{Tr}(AC)\right] N$$

(le premier terme est tangent et le second normal à $\mathcal{S}$).

2°) Une densité linéaire de force f sur le bord γ :

$$f = \left[\overline{A}n + \overline{n}\ Bt.Ct\right] - \left[\text{Div } B.n + \frac{\partial\, \overline{n}\ Bt}{\partial \gamma}\right] N$$

(le premier terme est tangent et le second normal à $\mathcal{S}$).

3°) Des forces concentrées F_i aux coins q_i :

$F_i = -\left[\overline{n}\ Bt\right]_i N_i$ (normales à $\mathcal{S}$)

($\left[\overline{n}\ Bt\right]_i$ est la discontinuité de $\overline{n}\ Bt$ au coin q_i)

4°) Une densité linéaire $\vec{M} = M\,t$ de moments de flexion sur γ:

$$M = -\overline{n}Bn$$

Il suffit de transformer, par intégrations par parties, chacun des termes de l'expression précédente de δW :

$$\int_{\mathcal{S}} \text{Tr}\left(A\,\frac{\partial \hat{Z}}{\partial p}\right) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \text{div}(AZ)\, d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} \text{Div } A.Z\ d\mathcal{S} = \int_{\gamma} \overline{n}AZ\ d\gamma - \int_{\mathcal{S}} \text{Div}A.Z\ d\mathcal{S}$$

$$-\int_{\mathcal{S}} \text{Tr}\left(B\,\frac{\partial \hat{\delta N}}{\partial p}\right) d\mathcal{S} = -\int_{\mathcal{S}} \text{div}(B\delta N)\, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \text{Div}B.\ \delta N\ d\mathcal{S} = -\int_{\gamma} \overline{n}B\delta N\ d\gamma + \int_{\mathcal{S}} \text{Div}B.\ \delta N\ d\mathcal{S}$$

$$\text{or } -\int_{\mathcal{S}} \text{Div } B.\delta N\ d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \text{Div } B.\left(CZ + \frac{\overline{\partial a}}{\partial p}\right) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \text{Div } B.CZ\ d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \text{Div}B.\frac{\overline{\partial a}}{\partial p}\, d\mathcal{S}$$

mais $\text{div}(a\ \overline{\text{Div } B}) = a\ \text{div}(\overline{\text{Div } B}) + \text{Div } B.\ \frac{\overline{\partial a}}{\partial p}$, donc :

$$-\int_{\mathcal{S}} \text{Div } B.\delta N \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} (\text{Div } B.CZ - \text{div}(\overline{\text{Div } B}).a)\, d\mathcal{S} + \int_{\gamma} \bar{n}\, \overline{\text{Div } B}\, a \, d\gamma$$

D'où : $\delta W = \int_{\mathcal{S}} (-\text{Div } A - \text{Div } B.C) Z \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} [\text{div}(\overline{\text{Div } B}) - \text{Tr}(AC)]\, a \, d\mathcal{S}$

$$+\int_{\gamma} \bar{n} A Z \, d\gamma - \int_{\gamma} \bar{n}\, \overline{\text{Div } B}\, a \, d\gamma - \int_{\gamma} \bar{n}\, B \delta N \, d\gamma$$

Remarque :

Notons que $Z = \pi \delta p$ (π est le projecteur orthogonal sur le plan tangent en p) et $a = \bar{N} \delta p$ sont indépendants sur $\mathcal{S}$ et sur γ mais δp et δN ne sont pas indépendants sur γ ; cependant δp et $\bar{n}\delta N$ sont indépendants sur γ.

En effet, $\delta N = n.\bar{n}\delta N + t.\bar{t}\delta N$

où $\bar{n}\delta N = -\bar{n}\, \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial p}}\, N = -\bar{N}\, \frac{\partial \delta p}{\partial n}$ car $\delta N = -\pi\, \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial p}}\, N$ (chapitre 1-1,4,1).

et $\bar{t}\delta N = -\bar{t}\, \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial p}}\, N = -\bar{N}\, \frac{\partial \delta p}{\partial \gamma}$

La donnée du champ $p \mapsto \delta p$ sur γ détermine $\frac{\partial \delta p}{\partial \gamma}$ donc $\bar{t}\,\delta N$ mais laisse $\frac{\partial \delta p}{\partial n}$ donc $\bar{n}\delta N$ complètement indéterminé.

Cette remarque oriente le calcul du dernier terme de δW :

$$-\int_{\gamma} \bar{n} B \delta N d\gamma = -\int_{\gamma} \bar{n}Bn.\bar{n}\delta N d\gamma + \int_{\gamma} \bar{n}Bt.\bar{N}\, \frac{\partial \delta p}{\partial \gamma}\, d\gamma$$

$$= -\int_{\gamma} \bar{n}Bn.\bar{n}\delta N d\gamma + \int_{\gamma} \frac{\partial \bar{n}Bt.\bar{N}\delta p}{\partial \gamma}\, d\gamma - \int_{\gamma} \frac{\partial\, \bar{n}Bt.\bar{N}}{\partial \gamma}\, \delta p d\gamma$$

$$= -\int_{\gamma} \bar{n}Bn.\bar{n}\delta N d\gamma - \sum_i [\bar{n}Bt]_i \overline{N_i}\, \delta q_i - \int_{\gamma} \frac{\partial\, \bar{n}Bt.\bar{N}}{\partial \gamma}\, \delta p d\gamma$$

De plus $\frac{\partial\, \bar{n}Bt.\bar{N}}{\partial \gamma} = \frac{\partial\, \bar{n}Bt}{\partial \gamma}\, \bar{N} + (\bar{n}Bt)\, \frac{\partial N}{\partial \gamma} = \frac{\partial\, \bar{n}Bt}{\partial \gamma}\, \bar{N} - (\bar{n}Bt)\bar{t}C$

car $\frac{\partial N}{\partial \gamma} = \frac{\partial N}{\partial p}\, t = -Ct$

On obtient finalement :

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}} \{[-\text{Div } A - \text{Div } B.C]\pi\delta p + [\text{div}(\overline{\text{Div } B}) - \text{Tr}(AC)]\, \bar{N}\delta p\}\, d\mathcal{S}$$

$$+\int_{\gamma} \{[\bar{n}A + (\bar{n}Bt)\bar{t}C]\, \pi\delta p - [\bar{n}\, \overline{\text{Div } B} + \frac{\partial\, \bar{n}Bt}{\partial \gamma}]\, \bar{N}\delta p\}\, d\gamma$$

$$-\int_{\gamma} \bar{n}Bn.\bar{n}\delta N d\gamma - \sum_i [\bar{n}Bt]_i\, \overline{N_i}\, \delta q_i$$

Ce qui démontre la proposition.

Il reste à montrer que $\int_\gamma \vec{M}\,\bar{n}\delta N\,d\gamma$ est bien le travail d'un couple de flexion $\vec{M} = M\,t$:

Si $\delta\theta$ est l'angle de rotation du plan tangent à la surface autour de la tangente à γ, le vecteur rotation est $\vec{\delta\theta} = \delta\theta.t$ et l'on a $\delta N = \vec{\delta\theta} \wedge N = \delta\theta.t \wedge N = \delta\theta.n$ donc $\bar{n}\delta N = \delta\theta$ d'où

$$\int_\gamma M.\delta\theta\,d\gamma = \int_\gamma M\,\bar{n}\delta N\,d\gamma.$$

Il peut exister d'autres réalisations des efforts au bord (cf. [23] page 84) = si l'on suppose qu'un moment de torsion de densité linéaire $\vec{M}_\tau = M_\tau\,n$ est appliqué sur γ, il est équivalent de considérer une force répartie sur γ de densité linéaire $\frac{\partial M_\tau N}{\partial\gamma} = -M_\tau.Ct + \frac{\partial M_\tau}{\partial\gamma} N$ à condition d'ajouter des forces concentrées $[M_\tau]_j N_j$ aux points p_j de discontinuité du moment de torsion. Cela résulte de l'expression du travail virtuel correspondant :

$$\delta\mathcal{T}_\tau = \int_\gamma M_\tau \bar{t}\delta N\,d\gamma = \int_\gamma -M_\tau\,\bar{t}\,\overline{\frac{\partial\delta p}{\partial p}}\,N\,d\gamma = \int_\gamma -M_\tau\,\bar{N}\,\frac{\partial\delta p}{\partial\gamma}\,d\gamma$$

$$= \int_\gamma \frac{\partial M_\tau \bar{N}}{\partial\gamma}\,\delta p\,d\gamma - \int_\gamma \frac{\partial(M_\tau\,\bar{N}\delta p)}{\partial\gamma}\,d\gamma$$

$$\delta\mathcal{T}_\tau = \int_\gamma \frac{\partial M_\tau N}{\partial\gamma}\,\delta p\,d\gamma + \sum_j [M_\tau]_j\,\bar{N}_j\,\delta p_j$$

N.B. : Le calcul développé dans ce paragraphe fournit des conditions au bord compatibles, du fait de l'indépendance de δp et $\bar{n}\delta N$ sur γ. Ce qui permet d'en déduire, sans ambiguité, les équations de l'équilibre ou du mouvement.

2,2,4 - Les équations d'équilibre d'une coque mince élastique soumise à des efforts extérieurs (forces et couples de flexion ou de torsion uniquement) se déduisent du principe de d'Alembert :

Pour tout déplacement virtuel $p \mapsto \delta p$, le travail virtuel $\delta \mathcal{T}_e$ des efforts extérieurs est opposé à celui des efforts dus aux contraintes ou égal à la variation δW de l'énergie de déformation. Il suffit d'égaler aux expressions de F, f, F_i et $\mathcal{M}$ les termes F_e, f_e, F_{i_e} et $\mathcal{M}_e$ d'efforts extérieurs.

Les équations du mouvement s'obtiennent simplement en ajoutant aux forces extérieures de densité superficielle F les forces d'inertie de densité superficielle $-\sigma\Gamma_p$ où σ est la densité superficielle de masse et Γ_p l'accélération du point p, mais il faut rajouter l'équation de continuité :

$$\boxed{\dot{\sigma} + \sigma\,[\mathrm{div}(\pi V) - \overline{N}\ V\ \mathrm{Tr}(C)] = 0}$$

où $\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma(x,t))$ (x désigne la molécule et non sa position) et V est la vitesse de la molécule x au point $p = \phi(x,t)$.

Cette équation se déduit de $\sigma\sqrt{\det G} = \text{constante}$ (pour chaque molécule) :

$$\dot{\sigma}\sqrt{\det G} + \sigma \frac{(\dot{\det G})}{2\sqrt{\det G}} = 0$$

$(\dot{\det G}) = \det G.\mathrm{tr}(G^{-1}\dot{G})$ (théorème de Jacobi)

$$\dot{G} = G\,S^{-1}\left[\frac{\hat{\partial}\pi V}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}\pi V}{\partial p}} - 2\,\overline{N}\ V.C\right] S \quad \text{(cf. chapitre 1 - 1,4,2)}$$

d'où $(\dot{\det G}) = \det G\ \mathrm{tr}\left(\frac{\hat{\partial}\pi V}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}\pi V}{\gamma p}} - 2\,\overline{N}\ V.C\right)$

$$= 2 \det G\,[\,\mathrm{div}(\pi V) - \overline{N}\ V\ \mathrm{tr}(C)]$$

et $\dot{\sigma} + \sigma[\mathrm{div}(\pi V) - \overline{N}\ V\ \mathrm{Tr}(C)] = 0.$

2,3 - Coques soumises à des compressions.

Pour prendre en compte les efforts agissant directement sur l'épaisseur d'une coque sans déformer nécessairement la surface support, nous supposerons que l'énergie spécifique de déformation dépend explicitement de l'épaisseur. L'énergie de déformation est alors :

$$W = \int_{\mathcal{S}} \alpha \, d\mathcal{S} \qquad \text{avec} \quad \alpha = \beta(x, G, F, h)$$

Dans un déplacement virtuel défini par les champs $p \mapsto \delta p$ et $p \mapsto \delta h$, la variation d'énergie δW devient :

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}} \overline{F} \, \delta p \, d\mathcal{S} + \int_{\gamma} \overline{f} \, \delta p \, d\gamma + \int_{\gamma} \overline{n} \, \delta N \, d\gamma + \sum_i \overline{F}_i \, \delta p_i + \int_{\mathcal{S}} c \, \delta h \, d\mathcal{S}$$

Au paragraphe (2,2,3), les quatre premiers termes ont été interprétés comme travaux virtuels de <u>forces</u> ($\vec{F}$, $\vec{f}$ et $\vec{F}_i$) et de <u>moments</u> ($\vec{M} = M\vec{t}$). Le dernier terme est le travail d'une <u>compression</u> $c = \frac{\partial \alpha}{\partial h}$.

On définit :

La <u>déformation d'épaisseur</u> $\varepsilon = \frac{h - h_o}{h_o}$ (scalaire sans dimension)

La <u>contrainte de compression</u> q dont le travail virtuel élémentaire est $q\delta\varepsilon = c\delta h$, et à laquelle correspond la relation contrainte-énergie : $q = h_o \frac{\partial \alpha}{\partial h}$.

Si la différence de pression entre les deux faces de la coque est $c_e = P_2 - P_1$, elle s'ajoute aux efforts extérieurs F_e, f_e, F_{i_e} et M_e et les équations d'équilibre (cf. § 2,2,4) deviennent :

$F = F_e$, $f = f_e$, $F_i = F_{i_e}$, $M = M_e$ et $c = c_e$ (avec $c = \frac{q}{h_o}$)

3 - <u>Elasticité linéaire des coques tangentiellement isotropes</u>.

Une configuration de la coque élastique, supposée sans contrainte et en équilibre stable, est prise comme <u>configuration de référence</u> (les grandeurs attachées à cette configuration sont affectées de l'indice zéro). Considérons une autre configuration . Nous avons défini (chapitre 1 ; § 2,2) : la <u>déformation tangentielle</u> Δ et la <u>déformation des courbures</u> K. Il résulte du théorème du § 2,2 (chapitre 1) qu'il est équivalent de supposer l'énergie de déformation fonction de G et F ou de Δ et K. Posons donc :

$$W = \int_{\mathcal{S}_o} E(p_o, \Delta, K) \, d\mathcal{S}_o$$

3,1 - Energie spécifique de déformation - Modules d'élasticité des coques.

3,1,1 - Dans l'hypothèse des faibles déformations, on ne conserve que les termes de plus bas degré en Δ et K dans le développement de l'énergie spécifique : E est une forme quadratique de ces deux tenseurs ([1]) car sa valeur est nulle et minimale pour $\Delta = 0$ et $K = 0$ (la configuration de référence, sans contrainte, est en équilibre stable).

L'hypothèse d'isotropie tangentielle implique l'invariance de ε par rotation dans le plan tangent. Nous en déduisons comme expression de l'énergie spécifique, la forme quadratique isotrope la plus générale :

$$2E = h_o[\lambda_1 tr(\Delta)^2 + 2\mu_1 Tr(\Delta^2)] + 2h_o^2[\lambda_2 Tr(\Delta)\, Tr(K) + 2\mu_2 Tr(\Delta K)] + h_o^3[\lambda_3 Tr(K)^2 + 2\mu_3 Tr(K^2)]$$

Nous avons écrit, en fait, une forme quadratique de Δ et $h_o K$ (qui sont sans dimension) où l'épaisseur h_o en p_o est prise comme longueur caractéristique de référence Alors les coefficients λ_i et μ_i ont tous même dimension que les coefficients de Lamé.

3,1,2 - Proposition : Pour que 2 E soit une forme quadratique définie positive, il est nécessaire et suffisant que les six modules d'élasticité vérifiant les inégalités :

$$\mu_1 \geqslant 0 \qquad \mu_1\mu_3 \geqslant \mu_2^2 \quad (\text{donc } \mu_3 \geqslant 0)$$

$$3\lambda_1 + 2\mu_1 \geqslant 0$$

$$(3\lambda_1 + 2\mu_1)(3\lambda_3 + 2\mu_3) \geqslant (3\lambda_2 + 2\mu_2)^2 \quad (\text{donc } 3\lambda_3 + 2\mu_3 \geqslant 0)$$

L'expression de ces modules en fonction des modules d'élasticité du matériau constituant la coque est étrangère à la théorie développée dans ce chapitre.

([1]) Nous supposons, ici, la coque non compressée. Sinon l'énergie E est une forme quadratique de Δ, K et ε

$$2E_{totale} = 2E + \nu\varepsilon^2 + 2[\chi_1 Tr(\Delta) + \chi_2 h_o Tr(K)]\varepsilon$$

3,1,3 - Remarques.

1°) En changeant l'orientation du vecteur normal, K se change en -K et le terme rectangle en Δ et K change de signe alors que les deux autres termes de 2 E sont inchangés. L'arbitraire dans l'orientation de la normale implique $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ et par conséquent :

$$\begin{cases} 2E = h_o[\lambda_1 Tr(\Delta)^2 + 2\mu_1 Tr(\Delta^2)] + h_o^3[\lambda_3 Tr(K)^2 + 2\mu_3 Tr(K^2)] \\ \mu_1 \geqslant 0 \qquad \mu_3 \geqslant 0 \qquad 3\lambda_1 + 2\mu_1 \geqslant 0 \qquad 3\lambda_3 + 2\mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

La suppression du terme rectangle n'est plus justifiée si l'orientation de la normale n'est pas arbitraire, c'est à dire si l'on admet une dissymétrie par rapport au plan tangent. Ce serait le cas de coques bilames (cf.[1]).

2°) Dans le cas le plus général les modules λ_i et μ_i dépendent du point p_o ou, au moins, des valeurs en p_o de l'épaisseur h_o et de la courbure C_o. La théorie classique de Love-Kirchhoff est complètement déduite d'une expression analogue de l'énergie spécifique avec comme relations supplémentaires :

$$\lambda_1 = 12\lambda_3 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \qquad \mu_1 = 12\mu_3 = \mu \qquad \lambda_2 = \mu_2 = 0$$

Nous établirons ces relations au chapitre 3 consacré à l'exposé de la théorie classique.

3,2 - Relations contraintes-déformations. Le cas des membranes.

De l'égalité $E(p_o, \Delta, K) = \alpha(x, G, F)\sqrt{\det \mathbb{G}}$, des expressions (2,2,2) des contraintes A et B, et de l'hypothèse $\|\Delta\| \ll 1$ on déduit les relations linéarisées contraintes-déformations :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial E}{\partial \Delta} + \dfrac{\partial E}{\partial K} C \qquad B = \dfrac{\partial E}{\partial K} \quad \text{où l'on a :} \\ \dfrac{\partial E}{\partial \Delta} = h_o(\lambda_1 Tr\ \Delta + 2\mu_1 \Delta) + h_o^2(\lambda_2 Tr\ K + 2\mu_2 K) \\ \dfrac{\partial E}{\partial K} = h_o^2(\lambda_2 Tr\ \Delta + 2\mu_2 \Delta) + h_o^3(\lambda_3 Tr(K) + 2\mu_3 K) \end{cases}$$

Il convient cependant d'adjoindre aux équations d'équilibre, relatives à Δ et K,

les relations de compatibilité (qui sont superflues si Δ et K sont exprimés en fonction des flèches (§ 3,3) qui deviennent les inconnues du problème).

Si la coque est soumise à des compressions (cf.§ 3 - Note (1)), les relations contraintes-déformations de la théorie linéaire sont déduites de l'énergie spécifique :

$$E = E_1(\Delta,K) + \frac{\nu}{2}\varepsilon^2 + [\chi_1 \mathrm{Tr}\,\Delta + \chi_2 h_o \mathrm{Tr}(K)]\varepsilon$$

où $E_1(\Delta,K)$ est la forme quadratique en (Δ,K) et ε est la variation d'épaisseur ($\varepsilon = \frac{h-h_o}{h_o}$ cf.§ 2,3). On obtient :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial E_1}{\partial \Delta} + \dfrac{\partial E_1}{\partial K} C + (\chi_1 + \chi_2 h_o C)\varepsilon \\ \\ B = \dfrac{\partial E_1}{\partial K} + \chi_2 h_o \varepsilon \\ \\ q = \nu\varepsilon + \chi_1 \mathrm{Tr}\,\Delta + \chi_2 h_o \mathrm{Tr}\,K. \end{cases}$$

Les équations des membranes (non compressées) sont déduites d'une énergie indépendante de K : $E = E(\Delta)$ $\quad \dfrac{\partial E}{\partial K} = 0.$

Il n'y a plus de contrainte de couple :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{G}}} \frac{\partial p}{\partial p_o} \frac{\partial E}{\partial \Delta} \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_2} \qquad B = 0$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{Div}\, A} + \mathrm{Tr}(Ac).N + F = 0 & (\text{sur } \mathcal{S}) \\ A_n = f & (\text{au bord}) \end{cases}$$

Dans le cas des faibles déformations des membranes tangentiellement isotropes, la contrainte est :

$$A = \frac{\partial E}{\partial \Delta} = h_o(\lambda_1 \mathrm{Tr}\,\Delta + 2\mu_1 \Delta)$$

3,3 - Expression des déformations en fonction des flèches.

Théorème : Soit $p \mapsto Z = V + u\,N$ un déplacement virtuel de composantes tangentielle V et normale u N. Les tenseurs infinitésimaux correspondants, de déformation tangentielle et de déformation des courbures, ont pour expressions :

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\partial} V}{\partial p} + \frac{\overline{\hat{\partial} V}}{\partial p}\right) - uC$$

$$K = \frac{\hat{\partial}}{\partial p}\left(\frac{\overline{\partial u}}{\partial p} + CV\right) + \left(\frac{\overline{\hat{\partial} V}}{\partial p} - uC\right)C$$

Notons que Δ et K sont symétriques ; en particulier, on a :

$K = \frac{\bar{\partial}}{\partial p}\left(\frac{\overline{\partial u}}{\partial p}\right) + c'(V) + c\,\frac{\hat{\partial} V}{\partial p} + \frac{\overline{\hat{\partial} V}}{\partial p}\,C - uC^2$ où $c'(V)$ est la dérivée covariante suivant le vecteur V de la courbure C :

$$C'(dp) = dC \quad (\forall\, dp) \text{ et } C'(dp)\delta p = C'(\delta p)\, dp \quad \text{(Codazzi)}$$

De $\bar{C} = C$ on déduit $\overline{C'(V)} = C'(V)$

La déformation tangentielle est $\frac{1}{2}(\mathbb{G}-1)$ où $\mathbb{G} = S_o G_o^{-1} G S_o^{-1}$.

On obtient la déformation tangentielle infinitésimale en dérivant $\frac{1}{2}(\mathbb{G}-1)$ par rapport au paramètre τ de déplacement virtuel, pour la valeur τ_o telle que $\mathbb{G} = 1$:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,\delta\mathbb{G} = \frac{1}{2}\,S_o G_o^{-1}\,\delta G\,S_o^{-1}\Big|_{\tau=\tau_o} = \frac{1}{2}\,S\,G^{-1}\,\delta G\,S^{-1}$$

et l'on déduit Δ de l'expression de δG (cf §1,3,4 - ch.1).

De même :

$$K = \delta[S_o G_o^{-1}[F-F_o]\,S_o^{-1}]\Big|_{\tau=\tau_o} = S_o G_o^{-1}\,\delta F S_o^{-1}\Big|_{\tau=\tau_o} = S\,G^{-1}\,\delta F\,S^{-1}$$

δF a été calculé au chapitre 1 (§ 1,3,4)

Petites déformations.

En théorie linéaire, pour une flèche $Z = V + u\,N$, l'approximation faite confond les tenseurs de déformations avec leur expression infinitésimale.

Remarque : On peut vérifier que Δ et K sont liés par les relations de compatibilité (ch.1 § 3,4) :

$$\begin{cases} \overline{\text{rot}(\overline{\text{Rot}\ \Delta})} + \text{Tr}(\text{Adj}\ C[K - C\Delta]) = 0 \\ \text{Rot}\ K = \text{Rot}\ \Delta.\text{Adj}\ C + \text{Rot}(C\Delta) \end{cases}$$

1°) $\text{Rot}\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) = \det C.\bar{V}\ \Sigma$ (ch.1, § 3,2 - Proposition 2)

$\text{Rot}\left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) = \det C.\bar{V}\ \Sigma + \frac{\partial\ \text{rot}\ V}{\partial p}$ $\left(\frac{\partial\ \text{rot}\ V}{\partial p} = \text{Rot}[\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}}]\right)$

$\text{Rot}(uC) = -\frac{\partial u}{\partial p}\ \Sigma\ C$ (Rot C = 0)

$\text{Rot}\ \Delta = \det C.\bar{V}\ \Sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial\ \text{rot}\ V}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial p}\ \Sigma\ C$

$\text{rot}(\overline{\text{Rot}\Delta}) = -\text{rot}(\Sigma V.\det C) - \text{rot}(C\Sigma\ \overline{\frac{\partial u}{\partial p}})$ (rot.grad = 0)

$= -\text{div}(V \det C) - \text{div}(\text{Adj}(C).\overline{\frac{\partial u}{\partial p}})$ (rot(ΣW) = div W)

$= -\det C.\text{div}\ V - \text{Tr}(\text{Adj}(C).C'(V)) - \text{Tr}(\text{Adj}(C).\hat{\frac{\partial}{\partial p}}(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}}))$

(Div(Adj C) = 0)

$= -\text{Tr}(\text{Adj}\ C[\hat{\frac{\partial}{\partial p}}(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}}) + C'(V) + C\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}])$

$= -\text{Tr}(\text{Adj}\ C[K - \frac{\partial V}{\partial p}C + u\,C^2])$

$= -\text{Tr}(\text{Adj}\ C[K - C\Delta])$.

2°) On a : $K = \overline{\hat{\frac{\partial}{\partial p}}(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV)} + C(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC)$

$\text{Rot}\ K = \det C[\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}\ C]\ \Sigma + \text{Rot}(C[\overline{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC])$

$= \text{Rot}\ \Delta.\ \text{Adj}(C) + \text{Rot}(C[\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC]) + \frac{1}{2}\frac{\partial \text{rot}\ V}{\partial p}\ \Sigma\ C\ \Sigma$

Mais : $\frac{\partial\ \text{rot}\ V}{\partial p}\ \Sigma\ C\ \Sigma = -\text{Rot}(\text{rot}\ V.C\Sigma)$

d'où : $\text{Rot}\ K = \text{Rot}\ \Delta.\text{Adj}\ C + \text{Rot}[C\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC^2 - \frac{1}{2}C(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}})]$

$\text{Rot}\ K = \text{Rot}\ \Delta.\text{Adj}\ C + \text{Rot}(C\Delta)$

CHAPITRE 3 - LES MODULES D'ELASTICITE DES COQUES SUIVANT LA THEORIE DE LOVE-KIRCHHOFF-KOITER.

1 - La théorie de Love-Kirchhoff.

Nous allons, dans ce chapitre, calculer les expressions des modules d'élasticité d'une coque (dans le cas des faibles déformations et d'isotropie tangentielle) en fonction des modules du matériau. Cette théorie, classique ([13],[19]), se déduit par approximation de l'élasticité à trois dimensions et repose sur une série d'hypothèses que nous énoncerons au moment où nous aurons à les utiliser et analyserons ensuite à la fin du chapitre.

Une coque mince est un milieu continu qui peut être grossièrement décrit par une surface, son support géométrique, notée $\mathcal{S}$ dans la position actuelle et $\mathcal{S}_o$ dans la position de référence. En tout point du matériau est définie une énergie spécifique volumique α qui ne dépend que de la valeur en ce point du tenseur de conformation [1] $G = \overline{\frac{\partial q}{\partial q_o}} \frac{\partial q}{\partial q_o}$ ou du tenseur de déformation $D = \frac{1}{2}(G-1)$

Les hypothèses et approximations classiques ont pour but de définir sur $\mathcal{S}$ une énergie spécifique de surface β , de sorte que $W = \int_\Omega \alpha d\Omega = \int_{\mathcal{S}} \beta d\mathcal{S}$ soit l'énergie totale de déformation.

Les premières hypothèses sont les suivantes :

(H_1) Minceur de la coque.

(H_2) Faibles déformations et isotropie du milieu à trois dimensions.

(H_3) Première hypothèse de Love-Kirchhoff : La surface-support géométrique est une surface matérielle intérieure à la coque, telle que les segments matériels normaux à $\mathcal{S}_o$ (avant déformation) restent normaux à $\mathcal{S}$ (après déformation).

Caractérisons un point q intérieur ($q \in \Omega$) par sa projection orthogonale p sur $\mathcal{S}$ et sa côte $z = \overline{pq}$ sur la normale orientée de vecteur unitaire N = l'hypothèse de minceur assure la biunivocité de l'application

---

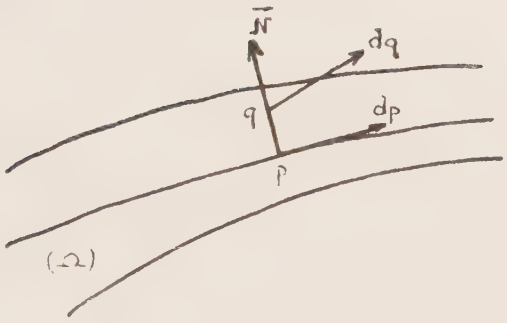
(1) $\frac{\partial q}{\partial q_o}$ désigne l'application linéaire tangente à l'application $q_o \mapsto q$ de la position de référence Ω_o sur la position actuelle Ω.

$q \mapsto (p,z)$

On a donc

$$q = p + z\,N \qquad (\text{dans } \Omega)$$

$$q_o = p_o + z_o N_o \qquad (\text{dans } \Omega_o)$$



Il en résulte par différenciation :

$$dq = (1 - z\,C)\,dp + N\,dz$$

$$dq_o = (1 - z_o C_o)dp_o + N_o dz_o$$

où C est l'opérateur de courbure (ch.1 § 1,2) de $\mathscr{S}$ en p, et C_o l'opérateur de courbure de $\mathscr{S}_o$ en p_o.

On peut écrire l'expression suivante de l'élément de volume :

$$d\Omega = (1 - \mathrm{Tr}(C)\,z + \det(C)\,z^2)\,d\mathscr{S}.dz$$

En effet : si $\mathrm{vol}(dq,d_1q,d_2q)$ désigne le volume [2] construit sur trois vecteurs dq, d_1q et d_2q, alors la deux-forme de surface sur $\mathscr{S}$ est

$\sigma(d_1p,d_2p) = \mathrm{vol}(N,d_1p,d_2p)$ où d_1p et d_2p sont tangents.

On a donc : $d\Omega = \mathrm{vol}(Ndz,(1-zC)d_1p,(1-zC)d_2p)$

en choisissant le premier vecteur normal et les deux centres parallèles au plan tangent.

D'où : $d\Omega = \sigma((1-zC)d_1p,(1-zC)d_2p)\,dz$

$= \det(1-zC)\ \ \sigma\,(d_1p,d_2p)\,dz$

Or $d\mathscr{S} = \sigma(d_1p,d_2p)$

et $\det(1-zC) = 1-\mathrm{Tr}(C)z + \det C.z^2$

Nous en déduisons l'expression cherchée de $d\mathscr{S}$ et; par suite :

$$\int_{\mathscr{S}} \beta\, d\mathscr{S} = \int_{\Omega} \alpha\,\det(1-zC)\,d\mathscr{S}.dz = \int_S \Big[\int_z \alpha(1-z\,\mathrm{Tr}(C) + z^2 \det C)dz \Big]\, d\mathscr{S}$$

---

(2) Vol est la trois-forme de volume (ou déterminant). Alors, si A est un opérateur linéaire, son déterminant et sa trace vérifient :
$\mathrm{vol}(Adq,Ad_1q,Ad_2q) = \det A.\ \mathrm{vol}(dq,d_1q,d_2q)$
et $\mathrm{vol}(Adq,d_1q,d_2q) + \mathrm{vol}(dq,Ad_1q,d_2q) + \mathrm{vol}(dq,d_1q,Ad_2q) =$
$= \mathrm{Tr}(A)\ \mathrm{vol}(dq,d_1q,d_2q)$
Si σ est la deux-forme de surface sur $\mathscr{S}$ et A un opérateur linéaire du plan tangent on a :
$\sigma(A.d_1p,A.d_2p) = \det(A)\ \ \sigma\,(d_1p,d_2p)$
$\sigma(Ad_1p,d_2p) + \sigma\,(d_1p,Ad_2p) = \mathrm{Tr}(A)\ \ \sigma\,(d_1p,d_2p)$ où d_1p et d_2p sont tangents.

d'où :

$$\beta = \int_z \alpha\,(1 - z\,\mathrm{Tr}(C) + z^2 \det(C))\,dz$$

Il reste à exprimer α en fonction de la côte z ; or on sait, suivant l'hypothèse (H_2) que :

$$2\,\alpha = \lambda \mathrm{Tr}(D)^2 + 2\mu\,\mathrm{Tr}(D^2)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

2 - Les tenseurs de déformation.

Notons F l'application $q_o \mapsto q$ dont $\frac{\partial q}{\partial q_o}$ est l'application linéaire tangente. D'après l'hypothèse (H_3) nous avons $q = F(q_o)$ et en particulier $p = F(p_o)$, avec $q = p + z\,N$ et $q_o = p_o + z_o\,N_o$.

F applique $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{S}$ et $\frac{\partial p}{\partial p_o} = \frac{\partial q}{\partial q_o}\Big|_{q_o = p_o}$ applique le plan tangent en p_o sur la plan tangent en p : $dp = \frac{\partial p}{\partial p_o}\,dp_o$.

z ne dépend que de q, donc de q_o, donc de p_o et z_o : $z = f(p_o, z_o)$

et $dz = \frac{\partial z}{\partial p_o}\,dp_o + \frac{\partial z}{\partial z_o}\,dz_o$.

On a donc :

$$dq = (1-zC)dp + N dz = \left((1-zC)\frac{\partial p}{\partial p_o} + N\frac{\partial z}{\partial p_o}\right)dp_o + N\frac{\partial z}{\partial z_o}\,dz_o$$

Mais $dq_o = (1 - z_o C_o)\,dp_o + N_o\,dz_o$ implique :

$$dz_o = \overline{N_o}\,dp_o$$

$dp_o = (1-z_oC_o)^{-1}\,\pi_o\,dq_o$ où $\pi_o = 1 - N_o\overline{N_o}$ est le projecteur orthogonal sur le plan tangent à $\mathcal{S}_o$ en p_o ($\pi_o dp_o = dp_o, \pi_o N_o = 0$) ; $(1-z_oC_o)^{-1}$ est l'inverse de $(1-z_oC_o)$ considéré comme opérateur du plan tangent. La régularité de cet opérateur résulte de l'hypothèse (H_1) de minceur : l'épaisseur h_o qui majore $|z_o|$ est faible en face des rayons de courbure :

$$\|z_oC_o\| \ll 1 \quad \text{et de même } \|zC\| \ll 1$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial q}{\partial q_o} = \left((1-zC)\frac{\partial p}{\partial p_o} + N\frac{\partial z}{\partial p_o}\right)(1-z_oC_o)^{-1}\pi_o + N\frac{\partial z}{\partial z_o}\overline{N_o}$$

d'où l'on déduit le tenseur de conformation $G = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \ \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}$

$$G = \pi_o B \pi_o + \pi_o V \overline{N_o} + N_o \overline{V} \pi_o + N_o b \overline{N_o}$$

$\pi_o B \pi_o$ opère dans le plan tangent en p_o

$N_o \overline{V} \pi_o$ opère du plan tangent sur la normale

$N_o b \overline{N_o}$ opère sur la normale.

On peut écrire, plus brièvement :

$$G = \left[\begin{array}{c|c} B & V \\ \hline \overline{V} & b \end{array}\right] \quad \text{avec} \begin{cases} B = (1-z_oC_o)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}(1-zC)^2 \frac{\partial p}{\partial p_o} + \overline{\frac{\partial z}{\partial p_o}} \frac{\partial z}{\partial p_o}\right)(1-z_oC_o)^{-1} \\ V = \frac{\partial z}{\partial z_o}(1-z_oC_o)^{-1} \overline{\frac{\partial z}{\partial p_o}} \\ b = \left(\frac{\partial z}{\partial z_o}\right)^2 \end{cases}$$

Dans <u>l'approximation linéaire</u> (hypothèse H_2) , $D = \frac{1}{2}(G-1)$ est l'infiniment petit. Posons :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial z_o} = 1 + e \\ \frac{\partial z}{\partial p_o} = 2\,\overline{v} \\ \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \frac{\partial p}{\partial p_o} = 1 + 2\,\Delta_o \end{cases}$$

(e, v, Δ_o sont des infiniment petits de déformations).

Développons G au premier ordre par rapport à e, v, Δ_o ou toute grandeur comparable et effectuons conjointement le développement au premier ordre en z_oC_o et zC (hypothèse H_1). On obtient :

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \Delta & V \\ \hline \overline{V} & e \end{array}\right] \text{ soit : } \begin{cases} b = 1 + 2\,e \\ V = 2\,v \\ B = 1 + 2\,\Delta_{z_o} \quad \text{avec } \Delta_z = \Delta_o - z_o(\tilde{C} - C_o) \text{ et } \tilde{C} = \left(\overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}\right) C \frac{\partial p}{\partial p_o} \end{cases}$$

Δ_o est le <u>tenseur de déformation plane</u> [3] (tangentielle) au niveau de $\mathcal{S}$.

Δ_{z_o} est le tenseur de déformation plane au niveau de la surface $\mathcal{S}_{z_o}$ parallèle à la précédente, de cote z_o.

Il apparait le tenseur $K = \tilde{C} - C_o$ de <u>déformation des courbures</u> [3] qu'on peut définir, au signe près, comme la dérivée par rapport à z_o du tenseur de déformation plane : $K + \frac{\partial \Delta}{\partial z_o} = 0$

---

(3) Cf. Chap.1 § 2,2.

3 - Calcul des modules d'une coque.

Il résulte des paragraphes 1 et 2 l'égalité :

$$2\alpha = \lambda \mathrm{Tr}(\Delta_o)^2 + 2\mu\ \mathrm{Tr}(\Delta_o^2) - 2z_o[\lambda\ \mathrm{Tr}(\Delta_o)\ \mathrm{Tr}(K) + 2\mu\ \mathrm{Tr}(\Delta_o K)]$$
$$+ z_o^2[\lambda\ \mathrm{Tr}(K)^2 + 2\mu\ \mathrm{Tr}(K^2)] + 2\lambda\ e\ [\mathrm{Tr}\Delta_o - z_o\ \mathrm{Tr}\ K] + (\lambda + 2\mu)e^2 + 4\mu\ \bar{v}\ v$$

Mais il reste à développer $e = \frac{\partial z}{\partial z_o} - 1$ et $v = \frac{1}{2}\frac{\overline{\partial z}}{\partial p_o}$ suivant les puissances de z_o. Le développement de la théorie ne peut se poursuivre sans le recours à une nouvelle hypothèse sur les déformations intérieures à la coque. On veut, en effet, que la théorie, une fois construite, ignore les déformations intérieures.

(H_4) Hypothèse de Kirchhoff-Love-Koiter :

L'état des contraintes est plan sur les feuillets [4]. Plus précisément : le vecteur tension appliqué à un feuillet est nul (ou négligeable dans l'expression de l'énergie). Or on sait que dans un matériau isotrope la contrainte Q dépend linéairement de la déformation suivant l'expression :

$$Q = \lambda\ \mathrm{Tr}(D) + 2\mu\ D$$

donc

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda(\mathrm{Tr}\ \Delta + e) + 2\mu\ \Delta & 2\mu\ v \\ \hline 2\mu\ \bar{v} & \lambda(\mathrm{Tr}\ \Delta + e) + 2\mu\ e \end{array}\right]$$

(H_4) implique $Q\ N = 0$ et par conséquent :

$$v = 0 \qquad \text{et} \qquad e = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}\ \mathrm{Tr}\ \Delta$$

On en déduit : $\alpha = \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\ \mathrm{Tr}(\Delta)^2 + \mu\ \mathrm{Tr}(\Delta^2)$

Soit $\alpha = A_1 - 2\ z_o A_2 + 3\ z_o^2\ A_3$

avec

$$A_1 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\ \mathrm{Tr}(\Delta_o)^2 + \mu\ \mathrm{Tr}(\Delta_o^2)$$
$$A_2 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\ \mathrm{Tr}(\Delta_o)\ \mathrm{Tr}(K) + \mu\ \mathrm{Tr}(\Delta_o K)$$
$$A_3 = \frac{1}{3}\ [\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\ \mathrm{Tr}(K)^2 + \mu\ \mathrm{Tr}(K^2)]$$

(4) Nous appellerons feuillets les surfaces parallèles au support géométrique $\mathcal{S}$.

D'autre part, suivant l'hypothèse de minceur on peut écrire

$$\beta = \int_{z_o} \alpha dz_o$$

et finalement :

$$\boxed{\beta = h_o A_1 - [z_o^2]_{h_o} A_2 + [z_o^3]_{h_o} A_3}$$

en notant $[z_o^2]_{h_o}$ et $[z_o^3]_{h_o}$ la variation dans l'épaisseur de la coque de z_o^2 et z_o^3, le long de la normale à la surface $\mathscr{S}_o$. La longueur " matérielle " de la normale est notée h_o ; c'est, par définition, l'épaisseur de la coque en P_o.

Enonçons enfin la dernière hypothèse :

(H_5) Troisième hypothèse de Love-Kirchhoff.

La surface $\mathscr{S}_o$ occupe dans la coque une position " moyenne " ;

Les segments matériels orthogonaux à $\mathscr{S}_o$ ont leur milieu sur $\mathscr{S}_o$.

Alors $[z_o^2]_{h_o} = 0$ et $[z_o^3]_{h_o} = \frac{h_o^3}{4}$

d'où

$$\boxed{\beta = h_o A_1 + \frac{h_o^3}{4} A_3}$$

La théorie classique fournit, par conséquent, les équations des coques élastiques non soumises à des compressions et de plus l'expression des modules de la coque en fonction des coefficients de Lamé [5] du matériau (cf. chapitre 1 - § 3,1,1) :

$$\lambda_1 = 12\,\lambda_3 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \qquad \mu_1 = 12\mu_3 = \mu$$

$$\lambda_1 = \mu_2 = 0$$

4 - L'hypothèse de Love-Kirchhoff-Koiter.

Avant Koiter [13] , la théorie classique était fondée sur les

(5) Notons que si $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ est le coefficient de Poisson et $E = \frac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ on a $\lambda_1 = \frac{E\sigma}{1-\sigma^2}$ $\mu_1 = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ et $D = \frac{Eh_o^3}{12(1-\sigma^2)}$ est la rigidité à la flexion

trois hypothèses de Love-Kirchhoff dont la seconde remplace (H_4) :

(H'_4) Deuxième hypothèse de Love-Kirchhoff :

a) Les pressions normales aux feuillets sont nulles (ou négligeables).

b) Deux points sur une même normale au support $\mathscr{S}_o$ restent à la même distance après déformation $(z = z_o)$.

Koiter, dans l'article cité, signale que ces hypothèses sont contradictoires et propose (H_4) au lieu de (H'_4) ; en effet, (b) implique $e = 0$, ce qui donne comme pression normale aux feuillets $p = \lambda \, Tr(\Delta) \neq 0$.

L'hypothèse $v = 0$ annule le cisaillement et l'hypothèse $e = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} Tr\ \Delta$ annule la pression sur les feuillets. Cette dernière implique

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial z_o} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \ Tr\ \Delta}$$

et par conséquent $$\underline{z = z_o(1 - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \ Tr\ \Delta_o) + z_o^2 \frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)} \ Tr\ K}$$

Nous voyons donc qu'annuler la pression sur les feuillets est une hypothèse sur la distribution normale des molécules dans la position déformée. De plus $v = 0$ s'écrit $\frac{\partial z}{\partial p_o} = 0$ soit grad Tr $\Delta_o = 0$ et grad Tr $K = 0$. Par conséquent : annuler le cisaillement sur les feuillets équivaut à supposer que les tenseurs de déformation varient peu sur la surface support.

Mais revenons à l'hypothèse qui annule la pression sur les feuillets. On pourrait supposer a priori, ce qui parait physiquement raisonnable, que la distance entre deux feuillets ne dépend au premier ordre, que de la distance initiale (dans la position non déformée) et de la déformation plane Δ , ce qui implique la relation différentielle : $\delta z = g(\Delta)\delta z_o$ avec $g(0) = 1$. Dans la théorie linéaire on pourra donc écrire :

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial z_o} = 1 - s \ Tr(\Delta)} \quad \text{si le matériau est isotrope.}$$

Si $s = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$ on retrouve l'hypothèse qui annule la pression normale aux feuillets

Si $s = 1$, $\frac{\partial z}{\partial z_o} = 1 - Tr\ \Delta$ s'écrit $Tr\ D = 0$, ce qui est la relation d'incompressibilité. Alors, la pression sur les feuillets qui limitent la coque ne sera généralement pas nulle. Cependant si l'incompressibilité est une

liaison imposée au matériau, nous verrons au chapitre 4 qu'il s'introduit un multiplicateur de Lagrange qui est une pression qui s'ajoute à la contrainte élastique Q et qui peut annuler les pressions normales sur les feuillets limites de la coque.

Si la coque est non compressée, ces pressions sont nulles et on peut éliminer e dans l'expression de l'énergie qui reste une forme quadratique de Δ_o et K, mais avec des modules d'élasticité très différents : on obtient d'après l'hypothèse (H_5) :

$$\beta = h_o[\lambda_1 Tr(\Delta_o)^2+2\mu_1 Tr(\Delta_o^2)] + h_o^3\,[\lambda_3 Tr(K)^2+2\mu_3 Tr(K^2)]$$

Mais ici : $\lambda_1 = 2\mu_1 = 3\lambda_3 = 6\mu_3 = \mu$

$\lambda_2 = \mu_2 = 0$

5 - L'hypothèse H_5. (cf.p.47)

En supposant que le feuillet-support occupe la position moyenne on a intégré l'énergie spécifique volumique α entre $-\frac{h_o}{2}$ et $+\frac{h_o}{2}$ et obtenu pour l'énergie spécifique de la coque :

$$\beta = h_o A(\Delta_o) + \frac{h_o^3}{12} A(K)$$

avec $$A(\Delta_o) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu} Tr(\Delta_o)^2 + \mu Tr(\Delta_o^2)$$

Si nous prenons comme support géométrique de la coque une surface feuillet $\mathscr{S}'$ de cote a, l'énergie de déformation sera :

$$w = \int \beta'\, d\mathscr{S}'$$

Nous allons écrire l'expression de β' en fonction des déformations Δ' et K' de $\mathscr{S}'$. Or nous avons les relations :

$$\Delta' = \Delta - a\,K \qquad \text{et} \qquad K' = K \quad \text{dans la théorie linéaire}$$

De plus $\beta'\, d\mathscr{S}' = \beta\, d\mathscr{S}$ implique $\beta' = \beta$ car $d\mathscr{S}' = \det(1-aC)\, d\mathscr{S}$ où C est le tenseur de courbure de $\mathscr{S}$ et aC est négligeable dans l'hypothèse de la minceur.

On obtient donc :

$$\beta' = h_o A(\Delta') + \frac{h_o^3}{12} A(K') + 2a\, h_o B(\Delta', K') + a^2 h_o\, A(K')$$

où $B(\Delta',K')$ est la forme polaire de A :

$$B(\Delta',K') = \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \operatorname{Tr}\Delta_o \operatorname{Tr} K + \mu \operatorname{Tr}(\Delta_o K)$$

Dans la théorie de la <u>flexion pure</u> des plaques et des coques développables, la déformation Δ_o de la surface moyenne est nulle (surface neutre). On a alors :

$$\beta = \frac{h_o^3}{12} A(K)$$

Si un autre feuillet que $\mathcal{S}$, soit $\mathcal{S}_3$ de cote a, est neutre, on a :

$$\Delta' = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta' = \left[\frac{h_o^3}{12} + a^2 h_o \right] A(K)$$

Suivant la position entre les feuillets limites du feuillet neutre, le coefficient de A(K) varie entre $\frac{h_o^3}{12}$ et $\frac{4h_o^3}{12}$, ce qui implique que pour une même déformation des courbures, il faut, pour fléchir une plaque en laissant neutre un feuillet limite, une énergie quatre fois supérieure à l'énergie nécessaire pour fléchir la plaque en laissant neutre la surface moyenne.

6 - <u>L'hypothèse H_3</u>. (cf.p.42)

La théorie classique n'est justifiée que si les faces de la coque sont des feuillets, ce qui implique qu'ils sont nécessairement parallèles.

L'hypothèse H_3, jointe à H_4, a pour conséquence que les feuillets, considérés comme surfaces matérielles, restent parallèles après déformation car la normale est direction de déformation principale.

Réciproquement, en pourrait remplacer (H_3) par :

(H'_3) Les feuillets (définis comme surfaces parallèles ou faces) restent parallèles dans la position déformée.

Jointe à (H_4) cette hypothèse implique (H_3).

Nous pouvons donc énoncer :

La théorie classique des coques minces est fondée sur l'hypothèse (outre les hypothèses de minceur, de faibles déformations et d'isotropie) :

> Les feuillets restent parallèles après déformation et l'état des contraintes y est plan.

De sorte que le support géométrique ne joue pas de rôle particulier parmi les feuillets sans la dernière hypothèse (H_5).

7 - Conclusion.

Les hypothèses de la théorie classique sont très restrictives sur la géométrie des déformations à l'intérieur d'une coque. Nous avons vu dans les paragraphes précédents combien les expressions des modules des coques en fonction des modules du matériau étaient sujettes à caution. L'erreur attachée aux hypothèses de travail n'est pas évaluable, d'autant plus que l'hypothèse d'isotropie du matériau risque de n'être pas vérifiée généralement pour des raisons technologiques. Cependant la forme de l'énergie de déformation semble rester qualitativement stable, ce qui est expliqué dans la théorie que nous avons exposée au chapitre 2.

CHAPITRE 4 - SUR UNE THEORIE GENERALE DES COQUES.

1 - Principe des travaux virtuels et équations des coques.

1,1 - Le principe des travaux virtuels.

Au chapitre 2, nous avons fondé la théorie des coques conservatives sur :

1°) L'existence d'une énergie spécifique de déformation invariante par déplacement solide.

2°) L'exigence de n'obtenir aux bords que des efforts de type classique : des forces et des moments.

Dans cette théorie, il apparait deux tenseurs de contrainte $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ qui vérifient des relations contraintes-déformations, déduites de l'expression de l'énergie.

En présence d'efforts extérieurs, l'application du principe des travaux virtuels conduit aux équations d'équilibre (où les premiers membres sont les efforts appliqués ; cf.ch.2 § 2,2) :

$$(E)\begin{cases} F = \{-\overline{\text{Div } A} - C\ \overline{\text{Div } B}\} + \{[\text{div}(\overline{\text{Div } B}) - \text{Tr}(AC)]N\} & (\text{sur } \mathcal{S}) \\ f = \{\bar{A}n + \bar{n}\ Bt.Ct\} - \{[\text{Div } B.n + \frac{\partial \bar{n} Bt}{\partial \gamma}]N\} & (\text{sur le bord } \gamma) \\ F_i = -[\bar{n}\ Bt]_i N_i & (\text{aux coins } q_i) \\ m = -(\bar{n}\ Bn)\ t & (\text{sur le bord } \gamma) \end{cases}$$

Par une démarche toute différente, nous nous proposons de montrer que ces équations peuvent être obtenues à partir du principe des travaux virtuels, sans supposer l'existence d'une énergie potentielle de déformation.

Un déplacement virtuel d'une coque (sans microstructure) est un champ de vecteurs $p \mapsto Z$ de R^3 défini sur la surface-support $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est une surface connexe et compacte à bord γ et à coins $q_1 \ldots q_n$; on posera $\partial \mathcal{S} = \gamma \cup \{q_1, \ldots, q_n\}$). Soit $\mathcal{V}$ l'espace des déplacements virtuels et $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$) le sous-espace des déplacements virtuels solides (restrictions à $\mathcal{S}$ de champs de moments de R^3).

Principe des travaux virtuels : La contrainte est une distribution réelle $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{V}$, de support $\mathcal{S}-\partial\mathcal{S}$, nulle sur $\mathcal{D}$.

$\mathcal{T}$ fait correspondre à tout déplacement virtuel $(p \mapsto Z) \in \mathcal{V}$, le travail virtuel $\mathcal{T}(p \mapsto Z)$.

Si $p \mapsto Z$ est un déplacement virtuel, il existe un unique champ de vecteurs tangents à $\mathcal{S}$, $p \mapsto V$, et un unique champ scalaire $p \mapsto u$ tels que $Z = V + uN$ sur $\mathcal{S}$ (N est le vecteur unitaire normal).

Afin de tirer les conséquences du principe des travaux virtuels, il nous faut caractériser l'espace $\mathcal{D}$.

1,2 - Caractérisation des déplacements virtuels prolongeables par un champ de moments.

Théorème : Pour qu'un champ de vecteurs de R^3 le long d'une surface connexe $\mathcal{S}$, $p \mapsto V + uN$ $(p \in \mathcal{S})$, soit prolongeable par un champ de moments de R^3, il faut et il suffit qu'il vérifie sur $\mathcal{S}$: $\Delta = 0$ et $K = 0$ où l'on a [4] :

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - \overline{\frac{\partial \hat{V}}{\partial p}}\right) - uC$$

$$K = \frac{\partial}{\partial p}\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV\right) + \left(\overline{\frac{\partial \hat{V}}{\partial p}} - uC\right) C$$

[Δ et K sont des tenseurs symétriques ($\overline{\Delta} = \Delta$ et $\overline{K} = K$) qui s'interprètenet, le premier comme la déformation tangentielle infinitésimale (ce qui ne veut pas dire qu'elle est petite !) et le second comme la déformation infinitésimale de courbure (cf. ch.2 § 3,3)]

Il existe un voisinage ouvert $U(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ dans R^3 et un difféomorphisme $\phi : U(\mathcal{S}) \to \mathcal{S} \times]-\varepsilon,+\varepsilon[$ tel que :

$\forall\, q \in U(\mathcal{S})$, $\phi(q) = (p,z) \iff q = p + zN$.

ϕ constitue un paramétrage d'un voisinage de $\mathcal{S}$ (z = cste sont les parallèles à $\mathcal{S}$).

Un champ de vecteurs $q \mapsto Z$ de R^3 défini sur le voisinage $U(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$Z = V(p,z) + u(p,z)\, N$$

Lemme 1 : L'application linéaire tangente $\frac{\partial Z}{\partial q}$ au champ de vecteurs de R^3 $p \mapsto V(p,z) + u(p,z)N$ se décompose sur la somme directe $\{N_p\} \oplus T_p(\mathcal{S})$ en :

$$\left[\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC\right)(1-zC)^{-1} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \hline \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C\right)(1-zC)^{-1} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right]$$

En effet $dZ = \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC\right) dp + N\left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C\right) dp + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + N\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz$ (1)

et $q = p + zN$ implique $dq = dp + z\,dN + N dz = (1-zC)\,dp + N\,dz$.

Pour $q \in U(\mathcal{S})$ (z assez petit), $(1-zC)$ est injectif et l'on a :

$dp = (1-zC)^{-1}\,\pi dq$ et $dz = \bar{N}\,dq$ (π est le projecteur orthogonal de R^3 sur $Tp(\mathcal{S})$).

Alors $dZ = \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC\right)(1-zC)^{-1}\pi dq + N\left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C\right)(1-zC)^{-1}\pi dq + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{N} dq + \frac{\partial u}{\partial z} N \bar{N}\, dq$

Lemme 2 : Pour qu'un champ de vecteurs de R^3 le long de $\mathcal{S}$, $p \mapsto \Omega + \omega N$ ($p \in \mathcal{S}$, $\Omega \in T_p(\mathcal{S})$, $\omega \in R$) soit prolongeable par un champ de vecteurs constants de R^3, il faut et il suffit que :

$$\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial p} - \omega C = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial p} + \bar{\Omega}\, C = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{S}.$$

La condition nécessaire résulte immédiatement du lemme précédent. Elle est suffisante car elle équivaut à $\frac{\partial}{\partial p}(\Omega + \omega N) = 0$; $(\Omega + \omega N)$ est donc constant sur $\mathcal{S}$ et le prolongement existe évidemment.

Remarque : Un champ de vecteurs de R^3, $q \mapsto Z$ est un champ de moments si et seulement si son application linéaire tangente $\frac{\partial Z}{\partial q}$ est antisymétrique.

Si $\frac{\partial Z}{\partial q}$ est antisymétrique, $q \mapsto \frac{\partial Z}{\partial q}$ est un champ constant dans R^3 et il existe un champ de vecteurs constants $q \mapsto \vec{R}$ (la rotation infinitésimale du champ de moments $q \mapsto Z$) tel que :

(1) cf. chap.1 § 1,2,5.

$$\frac{\partial Z}{\partial q}\vec{W} = \vec{R} \wedge \vec{W} \qquad (\forall \vec{W} \in R^3)$$

Sur le voisinage de $\mathscr{C}$, on peut poser $\vec{R} = \Omega + \omega N$ et par conséquent[2] :

$\frac{\partial Z}{\partial q} = \left[\begin{array}{cc|c} \omega & \Sigma & -\Sigma\ \Omega \\ \hline \bar{\Omega} & \Sigma & 0 \end{array}\right]$ est la décomposition de $\frac{\partial Z}{\partial q}$ sur $\{N\} \oplus T_p(\mathscr{C})$.

La condition du théorème est nécessaire :

Si $q \mapsto Z$ est un champ de moments, il existe $p \mapsto \Omega$ et $p \mapsto \omega$, un champ de vecteurs tangents et un champ scalaire tels que $\frac{\partial Z}{\partial q}$ ait la décomposition ci-dessus pour $q \in U(\mathscr{C})$:

$$(I)\quad \begin{cases} \hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC = \omega\Sigma(1-zC) & (a) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\Sigma\Omega & (c) \\ \frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C = -\bar{\Omega}\Sigma(1-zC) & (b) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & (d) \end{cases}$$

D'autre part $q \mapsto \vec{R} = \Omega + \omega N$ est constant sur $U(\mathscr{C})$:

$$(II)\quad \begin{cases} \hat{\frac{\partial \Omega}{\partial p}} = \omega C & (e) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 & (g) \\ \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\bar{\Omega}C & (f) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 & (h) \end{cases}$$

De (a) on déduit que sur $\mathscr{C}$ $(z = 0)$ on a : $\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC = \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC}$

soit $\Delta = 0$.

De (e), (b) et (a) on déduit que sur $\mathscr{C}$ on a (N.B : $d\hat{\Sigma} = 0$) :

$$K = \bar{\frac{\partial}{\partial p}}\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + cV\right) + \left(\overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}} - uC\right)C = 0$$

La condition du théorème est suffisante :

Soit $p \mapsto V+uN$ un champ de vecteurs de R^3, le long de $\mathscr{C}$.

Posons $\Omega = -\Sigma\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV\right)$ et $\omega\,\Sigma = \frac{1}{2}\left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}}\right)$ [3]

---

(2) $\bar{\Sigma} = \Sigma^{-1} = -\Sigma$ (cf.chap.1 § 1,3,1)

(3) $\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}}$ est antisymétrique (et $\in L(T_p(\mathscr{C}))$) et par conséquent proportionnel à Σ.

Montrons que si $\Delta = 0$ et $K = 0$, le champ de vecteurs $p \mapsto \Omega + \omega N$ de R^3 le long de $\mathscr{S}$ est la restriction sur $\mathscr{S}$ d'un champ constant de R^3. D'après le lemme 2, il suffit d'établir :

$$\hat{\frac{\partial \Omega}{\partial p}} - \omega C = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial p} + \bar{\Omega}\, C = 0$$

$$\hat{\frac{\partial \Omega}{\partial p}} - \omega C = -\Sigma \hat{\frac{\partial}{\partial p}} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV \right) + \Sigma \frac{1}{2} \left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}} \right) C$$

De $\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} + \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}} - uC = 0$, on déduit :

$$\hat{\frac{\partial \Omega}{\partial p}} - \omega C = -\Sigma \left(\hat{\frac{\partial}{\partial p}} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV \right) + \overline{\hat{\frac{\partial V}{\partial p}}} - uC \right) C = -\Sigma K = 0$$

Pour établir la seconde relation, on utilise le théorème de Gauss :

$$\hat{d}\left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} \right) \delta p - \hat{\delta}\left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} \right) dp = -\det C.\Sigma\, V\, \sigma(dp)(\delta p)$$

où $\sigma(dp)(\delta p) = \overline{\delta p}\, \Sigma dp$ est la 2-forme de surface.

De $\Delta = 0$ on déduit $\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} = uC + \omega\Sigma$ et par conséquent :

$$\hat{d}\left(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} \right) = du C + u \hat{dC} + d\omega \Sigma$$

Soit, d'après le théorème de Gauss :

$$-\det C.\Sigma V \sigma(dp)(\delta p) = du C \delta p - \delta u C dp + u(\hat{dC}\delta p - \hat{\delta C} dp) + d\omega \Sigma\, \delta p - \delta\omega \Sigma\, \delta p + \Sigma(\delta p \overline{dp} - dp \overline{\delta p}) \overline{\frac{\partial \omega}{\partial p}}$$

Mais $\hat{dC}\delta p - \hat{\delta C} dp = 0$ (relation de Codazzi)

et $\delta p \overline{dp} - dp \overline{\delta p} = \Sigma \sigma(dp)(\delta p)$

d'où $-\det C.\Sigma\, V = C\, \Sigma \overline{\frac{\partial u}{\partial p}} - \overline{\frac{\partial \omega}{\partial p}}$

Soit $\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial u}{\partial p} \Sigma C - \bar{V}\, \Sigma \det C = -\frac{\partial u}{\partial p} \Sigma C - \bar{V}\, C\, \Sigma C$ (car : $\det C \cdot \Sigma = C\, \Sigma\, C$)

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}\, C \right) \Sigma\, C \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial p} + \bar{\Omega}\, C = 0$$

Posons alors : $V(p,z) = V - z\Sigma\Omega$

$u(p,z) = u$

$Z(p,z) = V(p,z) + u(p,z)\,N$ } sur $U(\mathcal{S})$

Montrons que le système (I) est vérifié :

$$\frac{\partial u(p,z)}{\partial z} = 0 \qquad (d) \qquad\qquad \frac{\partial V(p,z)}{\partial z} = -\Sigma\Omega \qquad (c)$$

$$\frac{\partial u(p,z)}{\partial p} + \overline{V(p,z)}C = \frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C - z\left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C\right)C = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C\right)(1-zC) = -\bar{\Omega}\Sigma(1-zC) \qquad (b)$$

$$\frac{\hat{\partial} V(p,z)}{\partial p} - u(p,z)C = \frac{\hat{\partial} V}{\partial p} - uC - z\,\frac{\hat{\partial}}{\partial p}\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV\right) = \omega\Sigma - z\,\frac{\hat{\partial}\Sigma\Omega}{\partial p} = \Sigma\omega(1-zC) \qquad (a)$$

Par conséquent le champ $q \mapsto Z$ ainsi défini, qui prolonge au voisinage de $\mathcal{S}$ le champ donné sur $\mathcal{S}$, a une application linéaire tangente antisymétrique qui s'écrit plus précisément (d'après la remarque faite plus haut)):

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \left[\begin{array}{c|c} \omega\Sigma & -\Sigma\Omega \\ \hline \bar{\Omega}\Sigma & 0 \end{array}\right]$$

soit $\dfrac{\partial Z}{\partial q}\,dq = \vec{R} \wedge dq$ où $\vec{R} = \Omega + \omega N$ est constant sur $U(\mathcal{S})$.
On obtient par quadrature : $\vec{Z}(q) = \overrightarrow{Z(q_1)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{q_1 q}$ sur $U(\mathcal{S})$, relation caractéristique d'un champ de moments, qui se prolonge à tout R^3.

1,3 - Equations des contraintes des coques.

Il résulte du principe des travaux virtuels et du théorème ci-dessus que la distribution $\mathcal{T}$ s'écrit :

$$\mathcal{T}(p \mapsto V+uN) = \int_{\mathcal{S}} [\phi_o(\Delta) + \psi_o(K)]\,d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} [\phi_1(\Delta') + \psi_1(K')]\,d\mathcal{S} + \ldots + \int_{\mathcal{S}} [\phi_k(\Delta^{(k)}) + \psi_k(K^{(k)})]\,d\mathcal{S}$$

où $\Delta^{(j)}$ et $K^{(j)}$ sont les $j^{\text{èmes}}$ dérivées covariantes, k dépend de l'ordre de la distribution, ϕ_j et ϕ_j sont des applications linéaires à valeur dans R. Seul le premier terme conduit à des efforts aux bords uniquement de type classique (forces et couples - cf. ch.2 § 1 et 2,1). En ne retenant que ce

premier terme [4], on obtient le résultat suivant :

Proposition : Les contraintes sont exprimées par deux tenseurs $Q = (q_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, symétriques, de sorte que, dans un déplacement virtuel $p \mapsto Z = V + uN$, le travail virtuel est :

$$\mathcal{T} = \int_{\mathcal{S}} (\mathrm{Tr}(Q\Delta) + \mathrm{Tr}(BK))\, d\mathcal{S}$$

Les équations d'équilibre sont les équations (E) (paragraphe 1) où l'on a . $A = Q + B\,C$.

On peut, en effet, toujours écrire $\phi_o(\Delta) = \mathrm{Tr}(Q\Delta)$ et $\phi_o(K) = \mathrm{Tr}(BK)$ où Q et B sont symétriques car Δ et K le sont.

$$\mathrm{Tr}\,(Q\Delta) = \mathrm{Tr}\,(Q\,(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC))$$

$$\mathrm{Tr}\,(BK) = \mathrm{Tr}\,(B\,\frac{\partial \hat{}}{\partial p}\,(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV)) + \mathrm{Tr}\,(BC\,(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC))$$

En posant $A = Q + B\,C$, on obtient :

$$\mathcal{T} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{Tr}(A(\frac{\partial \hat{V}}{\partial p} - uC)) + \mathrm{Tr}(B\,\frac{\partial \hat{}}{\partial p}\,(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + C\,V))\, d\mathcal{S}$$

C'est la même expression du travail que dans le cas des coques conservatives (chap.1 § 2,2,2) d'où l'on déduit, par intégrations par parties, les mêmes équations (E).

---

(4) Nous qualifierons les équations obtenues, d'équations des contraintes des coques du 1° ordre (par rapport aux déformations). Cependant, il faut remarquer que :
1°) Cette théorie peut être qualifiée de théorie du 2° gradient (par rapport aux déplacements).(cf.[27]).
2°) Au premier gradient on a nécessairement $\psi_o = 0$ et l'on ne peut atteindre que les membranes.
3°) Cette théorie n'est en fait qu'un cas particulier de la théorie du 2° gradient, puisque par exemple $\phi_1(\Delta')$ est un terme de second gradient. Mais de tels termes impliquent des conditions aux bords non classiques (chap.2 § 2,1) qui " travaillent " même si le bord est encastré (notions de doubles couches de forces, effets capillaires, etc....).

1,4 - Sur une extension du principe des travaux virtuels impliquant des microstructures.

Soit $\mathcal{V}$ l'espace des champs de vecteurs de R^3 (définis sur R^3 et à valeurs dans R^3). Soit $\mathcal{E}$ l'espace des champs de 2-tenseurs mixtes symétriques de R^3 ($(q \mapsto D) \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{D} = D$) et $\mathcal{L}$ le sous-espace des " déformations " de R^3 :

$(q \mapsto D) \in \mathcal{L} \iff \exists\, (q \mapsto Z) \in \mathcal{V}$ tel que $D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial q} + \overline{\frac{\partial Z}{\partial q}} \right)$.

Pour un milieu continu à trois dimensions, de domaine borné $\mathcal{U}$, le travail virtuel dans le déplacement virtuel $q \mapsto Z$ est (au premier gradient) le scalaire :

$$\mathcal{T}(q \mapsto Z) = \int_{\mathcal{U}} \mathrm{Tr}\left(Q \frac{\partial Z}{\partial q} \right) d\mathcal{U} = \int_{\mathcal{U}} \mathrm{Tr}\,(Q\,D)\, d\mathcal{U} = \theta(q \mapsto D)$$

θ est une distribution sur $\mathcal{E}$. On peut, dans ce cas, énoncer le :

Principe des travaux virtuels : La contrainte est une distribution θ sur $\mathcal{E}$ à support borné $\mathcal{U}$.

En présence d'une distribution $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{V}$ " d'efforts appliqués ", de même support $\mathcal{U}$, on a :

$$\forall\, (q \mapsto Z) \in \mathcal{V} \qquad \theta\left(q \mapsto \frac{\partial Z}{\partial q}\right) = \mathcal{F}(q \mapsto Z)$$

$\mathcal{U}$ est le domaine occupé par le milieu.

Cet énoncé du principe des travaux virtuels, pour un milieu à trois dimensions, conduit à la notion classique de contrainte, exclut les microstructures, mais n'exclut pas les efforts d' " ordre supérieur " (Théorie du 2° gradient et plus....).

Motivé par la relativité générale, J.M. Souriau [5] propose d'adopter

---

(5) cf [3] . Dans l'énoncé (relativiste) de J. M. Souriau, le support de la distribution n'est pas borné mais [illegible] des champs de vecteurs et l'espace des 2-formes numériques. [illegible] dans l'espace-temps ; $\mathcal{L}$ est [illegible] métrique Riemannienne ; et $\mathcal{F} = 0$. [illegible] particulier, la dynamique relativiste [illegible].

cet énoncé pour tous les milieux continus ; si le support $\mathcal{U}$ de la distribution est un ouvert relativement compact de R^3, on n'obtient rien de nouveau.

Au contraire, si $\mathcal{U} = \mathcal{S}$ est une surface (ou un fil, ou un point) de R^3, on obtient une théorie qui implique l'existence de certaines microstructures.

Théorie du premier gradient : La contrainte est une distribution du 1° ordre, de support une surface $\mathcal{S}$ (bornée) :

$$\theta(q \mapsto D) = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{Tr}(Q\ D)\ d\ \mathcal{S}$$

La valeur de Q est " nulle hors de $\mathcal{S}$ ":

$(p \mapsto Q)$ est un champ de 2-tenseurs mixtes symétriques de R^3, le long de $\mathcal{S}$.

$(q \mapsto D)$ est un champ quelconque sur R^3 de 2-tenseurs mixtes.

En utilisant la décomposition canonique de R^3 en un point p de $\mathcal{S}$:

$R^3 = \{N\} \oplus T_p(\mathcal{S})$, on a : $Q = \left[\begin{array}{c|c} A & W \\ \hline -\bar{W} & a \end{array}\right]$ (avec $\bar{A} = A$)

$$Z = V + u\,N$$

et d'après le lemme 1 :

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \hat{V}}{\partial p} - u\,C & \dfrac{\partial V}{\partial z} \\ \hline \dfrac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}\,C & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right] \quad \text{sur } \mathcal{S}\ .$$

Donc : $\mathcal{T} = \int_{\mathcal{S}} \left(\mathrm{Tr}\left(A\left(\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial p} - u\,C\right)\right) - \left(\dfrac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}\,C\right)W - \bar{W}\dfrac{\partial V}{\partial z} + a\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) d\,\mathcal{S}$

et par intégrations par parties on obtient :

$$\mathcal{T} = \int_{\mathcal{S}} \left((-\mathrm{Div}\,A - \bar{W}\,C)V + (\mathrm{div}\,W - \mathrm{Tr}(A\,C))\,N\,u\right) d\,\mathcal{S}$$

$$+ \int_{\gamma} \bar{n}(A\,V - W u)\,d\gamma + \int_{\mathcal{S}} \left(-\bar{W}\dfrac{\partial V}{\partial z} + a\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) d\,\mathcal{S}$$

Notons bien que V, u, $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ sont indépendants sur $\mathcal{S}$. L'état des

contraintes est exprimé par :

Un 2-tenseur mixte symétrique A du plan tangent.

Un vecteur tangent W.

Un scalaire a.

Et il apparait :

Une densité de force : $F = (-\overline{\text{Div } A} - C\,W) + (\text{div } W - \text{Tr}(A\,C)\,N)$ sur $\mathcal{S}$

$f = An - \bar{W}n.N$ sur γ

Le dernier terme du travail virtuel peut être interprété par la présence de microstructures (de sorte que le champ $p \mapsto V + uN$ défini sur $\mathcal{S}$ ne suffise plus à exprimer une variation de la configuration) :

Un " déplacement virtuel de la coque " devient :

1°) Le déplacement virtuel habituel $p \mapsto Z + uN$ défini sur $\mathcal{S}$

2°) Un second champ de vecteurs de P^3 le long de $\mathcal{S}$: $p \mapsto V_d + u_d N$ dont le travail virtuel est $\int_{\mathcal{S}} (-\bar{W}_d V_d + a_d u_d)\, d\mathcal{S}$, et que nous qualifierons de " déplacement virtuel différentiel ".

Ce dernier peut être interprété comme une différence de déplacement sur les faces de la coque, de sorte que $F_d = -W_d + a_d N$ est une <u>différence de forces appliquées entre les deux faces</u>.

Tout se passe comme si :

1°) La coque avait une <u>épaisseur</u> h dont la <u>variation virtuelle</u> est u_d. Le scalaire a est une <u>contrainte de compression</u> (6).

2°) Les deux faces pouvaient glisser l'une sur l'autre, le <u>glissement virtuel</u> étant V_d. Le vecteur $-W_d$ est une <u>contrainte de glissement</u> (7).

Dans le cas où il n'est appliqué à la coque aucun effort de compression ni de glissement, on a $F_d = -W + a\,N = 0$.

---

(6) cf. chap.2 § 2,3.

(7) Par respect des équations aux dimensions on peut poser $W_d = \frac{\Sigma}{h}$ en utilisant la longueur de référence h ; le travail virtuel de la force $-W_d$ peut être interprété comme travail du couple $\vec{\mathcal{M}} = -\Sigma\, W = -\Sigma\, h\, W_d$ (Σ : cf. note 7) orthogonal à W_d, ce qui est physiquement équivalent.
Nous reviendrons sur cette interprétation physique et sur de telles microstructures au § 3,2,2 de ce chapitre.

Les équations se réduisent à des équations d'équilibre d'une membrane :

$$\begin{cases} F = -\overline{\text{Div } A} - \text{Tr}(A\ C)\ N & \text{sur } \mathcal{S} \\ f = An & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

La théorie du 2° gradient repose sur la définition : la contrainte est une distribution du 2° ordre $\theta(q \mapsto D) = \int_{\mathcal{S}} (\text{Tr}(Q\ D) + \varphi_p(D'))\ d\mathcal{S}$;

où φ_p est une fonction linéaire à valeurs dans R et $p \mapsto \varphi_p$ est défini sur $\mathcal{S}$; D' est la dérivée dans R^3 du champ $q \mapsto D$ (défini sur R^3). Cette théorie est plus générale que celle que nous avons présentée au début de ce chapitre (cf. note 4), puisqu'elle implique l'existence de microstructures, comme la théorie du premier gradient, et ne sélectionne pas les contraintes dont les efforts au bord sont des forces et des couples. Pour ce faire, il conviendrait de faire jouer un rôle différent à la dérivée transversale $\frac{\partial D}{\partial z}$ et à la dérivée tangentielle $\frac{\partial D}{\partial p}$. Plus précisément, on peut retrouver les équations (E) à partir de la distribution θ en y posant $\varphi(D') = \text{Tr}(\mathcal{B}\frac{\partial D}{\partial z})$ puis en annulant les microstructures.

2 - Coques minces soumises à des liaisons internes.

2,1 - Liaisons internes dans les milieux continus.

Un milieu continu est la donnée de :

1°) Une variété de dimension 3, $\mathcal{M}$, dont les points sont appelés molécules.

2°) Un ensemble $\mathcal{C}$ de C^∞-difféomorphismes de $\mathcal{M}$ sur un ouvert de R^3. Ce sont les configurations.

Si $\varphi_1 : \mathcal{M} \to \Omega_1$ et $\varphi_2 : \mathcal{M} \to \Omega_2$ sont deux configurations, alors le C^∞-difféomorphisme local de R^3, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ est un changeur de configurations.

Deux configurations φ_1 et φ_2 ont même forme s'il existe une isométrie U de R^3 qui prolonge le changeur de configurations : $U = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ sur Ω_1.

Si l'on identifie $\mathcal{M}$ avec l'image d'une de ses configurations $\to \Omega_o$, alors l'identité sur Ω_o est appelée configuration de référence ; on appellera alors

configurations les applications $\Omega_o \to \Omega$ de l'ouvert Ω_o de R^3 sur l'ouvert Ω de R^3.

Etant donnée une configuration $\varphi : \Omega_o \to \Omega$ qui applique $p_o \in \Omega$ en $p \in \Omega$, la conformation en p_o de la configuration donnée (et relative à la configuration de référence) est le tenseur $G = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \frac{\partial p}{\partial p_o}$ où $\frac{\partial p}{\partial p_o}$ est l'application linéaire tangente à φ en p_o.

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème : Pour que deux configurations φ_1 et φ_2 aient même forme, il est nécessaire et suffisant qu'elles induisent le même champ de conformation : $G_1 = G_2 \quad \forall\, p_o \in \Omega_o$.

Le milieu est libre si $\mathcal{C}$ est maximal : pour toute configuration $\varphi : \Omega_o \to \Omega$ et tout C^∞-difféomorphisme de la composante connexe de l'identité $\psi : \Omega \to \Omega'$ d'un ouvert de R^3 sur un ouvert de R^3, $\psi \circ \varphi$ est une configuration de $\mathcal{C}$.

Le milieu est lié s'il existe une restriction à une partie $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ de l'ensemble des configurations. Les configurations dans $\mathcal{C}'$ seront dites admissibles.

On peut par exemple imposer au domaine de valeur Ω des configurations d'être fixe : milieu dans une boite, un canal, un tuyau etc... Nous qualifierons une telle liaison d'externe : elle porte sur la configuration sans restriction sur la conformation G en chaque point.

Une liaison interne est une condition portant sur la forme, donc sur le champ $p_o \mapsto G$.

Liaison interne du premier ordre :

Etant donné un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n et une application C^∞-différentiable $F : L(R^3) \to \mathcal{E}$, on pose $\boxed{F(G) = 0}$ (8)

Exemples : 1°) $\varphi \in \mathcal{C}' \iff G-1 = 0 \iff$ Le milieu est un solide.

2°) $\varphi \in \mathcal{C}' \iff \det G-1 = 0 \iff$ Le milieu est incompressible.

---

(8) Une liaison interne du 2° ordre porte sur G et sa dérivée première G' : $F(G,G') = 0$ etc...

Supposons donnée une liaison interne scalaire : $F(G) = 0$

$F(g_{ij}) = 0$ implique $\dfrac{\partial F(g_{ij})}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} = 0$ soit $\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial F(G)}{\partial G} \delta G \right) = 0$ (9)

De $\delta G = \overline{\dfrac{\partial p}{\partial p_o}} \dfrac{\partial \delta p}{\partial p_o} + \overline{\dfrac{\partial \delta p}{\partial p_o}} \dfrac{\partial p}{\partial p_o}$ on déduit :

Théorème : Si le milieu est soumis à une liaison scalaire $F(G) = 0$, les déplacements $p \mapsto \delta p$ compatibles avec la liaison, vérifient :

$$\mathrm{Tr}\left(\Phi \frac{\partial \delta p}{\partial p}\right) = 0 \quad \text{où} \quad \Phi = 2 \frac{\partial p}{\partial p_o} \frac{\partial F(G)}{\partial G} \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} \quad (\Phi \text{ est symétrique}).$$

Liaisons holonômes et non holonômes :

On peut supposer que la liaison dépend du temps ($F(G,t) = 0$). En dérivant par rapport au temps, on obtient $\mathrm{Tr}\left(\Phi \dfrac{\partial V}{\partial p}\right) + \dfrac{\partial F(G,t)}{\partial t} = 0$ où $p \mapsto V$ est le champ de vitesse.

Soit $\Delta = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial V}{\partial p} + \overline{\dfrac{\partial V}{\partial p}} \right)$ la vitesse de déformation, la condition s'écrit

$$\mathrm{Tr}(\Phi \Delta) + \frac{\partial F(G,t)}{\partial t} = 0$$

Une liaison $F(G) = 0$ (ou $F(G,t) = 0$) est holonôme. Une liaison portant sur la vitesse de déformation $\mathrm{Tr}(\Phi \Delta) + b = 0$ (où $\Phi(G,t)$ est une matrice et $b(G,t)$ un scalaire) est non holonôme ; elle est semi-holonôme si elle s'intègre en $F(G,t) = 0$.

Equations d'équilibre d'un milieu élastique soumis à une liaison interne $F(G) = 0$: le milieu est conservatif ; il possède l'énergie de déformation $W = \int_\Omega \alpha(G)\, d\Omega$, dont la variation dans un déplacement virtuel est :

$$\delta W = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(Q \frac{\partial \delta p}{\partial p}\right) d\Omega \quad \text{où} \quad Q = \frac{2}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial p}{\partial p_o} \frac{\partial \alpha \sqrt{\det G}}{\partial G} \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}}$$ est la contrainte.

Si $\delta \mathcal{T}_e$ est le travail des forces extérieures, le principe de d'Alembert s'écrit: $\delta W - \delta \mathcal{T}_e = 0$ pour tout déplacement compatible. On en déduit l'existence d'un multiplicateur de Lagrange λ :

---

(9) $\dfrac{\partial F(G)}{\partial G} = \left\| \dfrac{\partial F(G)}{\partial g_{ij}} \right\|$

$$\delta W - \delta \mathcal{T}_e = \int_\Omega \lambda \, \mathrm{Tr}\left(\Phi \frac{\partial \delta p}{\partial p}\right) d\Omega \qquad \forall\, p \mapsto \delta p$$

soit : $$\int_\Omega \mathrm{Tr}\left([Q-\lambda\Phi] \frac{\partial \delta p}{\partial p}\right) d\Omega = \delta \mathcal{T}_e .$$

Les équations d'équilibre sont les équations de l'élasticité classique dans lesquelles une contrainte $-\lambda\Phi$ s'ajoute à la contrainte Q :

$\mathrm{Div}(Q-\lambda\Phi) + \rho \overline{F_e} = 0 \quad \forall\, p \in \Omega$ $(Q-\lambda\Phi)n = T_e$ au bord	(n est le vecteur unitaire normal extérieur - T_e est la tension au bord).

(les équations du mouvement s'obtiennent en ajoutant les forces d'inertie $-\rho\Gamma$ dans la première équation. ρ est la densité).

Milieu incompressible.: La liaison est $F(G) = \det G - 1 = 0$

Alors $\delta(F(G)) = \delta(\det G) = \det G \, \mathrm{Tr}(G^{-1}\delta G)$ (Jacobi)

D'où $\frac{\partial F(G)}{\partial G} = \det G . G^{-1}$ et $\Phi = 2 \det G . \frac{\partial p}{\partial p_o} G^{-1} \overline{\frac{\partial p}{\partial p_o}} = 2 \det G . \mathbb{1}$

(les déplacements compatibles vérifient $\mathrm{Tr}(\det G \frac{\partial \delta p}{\partial p}) = 0$ donc

$\mathrm{div}\, \delta p = \mathrm{Tr}(\frac{\partial \delta p}{\partial p}) = 0$).

Φ est scalaire. Posons $p = -\lambda\Phi$; c'est une pression.

S'il s'agit d'un fluide incompressible, milieu sans énergie interne, alors $Q = 0$ et les équations deviennent $\begin{cases} \mathrm{grad}\, p = \rho F_e - \rho\Gamma & \text{(dans } \Omega) \\ pn = T_e & \text{(au bord)} \end{cases}$

Milieu fibreux :

Identifions $\mathcal{M}$ avec l'une des configurations (configuration de référence).

En chaque point de $\mathcal{M}$, il existe une direction (définie par un vecteur unitaire $\vec{u}_o$) suivant laquelle le milieu est inextensible = $ds^2 = ds_o^2$ soit $\bar{u}_o G u_o = 1$.

On a donc $$\boxed{F(G) = \frac{1}{2}(\bar{u}_o G u_o - 1) = 0}$$

On en déduit $\frac{\partial F(G)}{\partial G} = u_o \bar{u}_o$ d'où $\boxed{\Phi = u \bar{u}}$ où $u = \frac{\partial p}{\partial p_o} u_o$ est l'image de u_o (on a $\vec{u}^2 = 1$).

Φ est le projecteur orthogonal sur le vecteur u. La contrainte additionnelle est $-\lambda\ u\ \bar{u}$.

Les trajectoires du champ $p \mapsto u$ sont les fibres. Elles sont inextensibles. Si le milieu est sans énergie interne (alors $Q = 0$; un tel milieu est aux fils ce qu'une poussière est aux points matériels), alors, sur le bord, on a $\lambda\ u\ \bar{u}\ n = T_e$: la tension au bord est tangente aux fibres. L'équation de la dynamique devient :

$$\mathrm{Div}(\lambda\ u\ \bar{u}) = \rho\ F_e - \rho\Gamma\ , \text{ soit } \underline{\frac{dT}{ds} + T\ \mathrm{div}\ u = \rho(F_e - \Gamma)} \quad \text{avec } \underline{T = \lambda u}$$

Milieux non conservatifs et liaisons non holonômes.

Supposons donnée une liaison interne non holonôme (indépendante du temps) du 1° ordre, qui est une restriction à un sous-espace $\mathcal{V}'$ de l'espace des déplacements virtuels $\mathcal{V}$.

Une telle liaison s'écrit $\mathrm{Tr}(\Phi\ \frac{\partial \delta p}{\partial p}) = 0$ si elle est scalaire (sinon c'est un ensemble de r relations scalaires).

Or, pour un milieu continu non nécessairement conservatif, on a le .

Principe des travaux virtuels : La contrainte est une distribution réelle $\mathcal{T}$ sur l'espace $\mathcal{V}$ des champs de vecteurs de R^3, de support borné Ω (le domaine occupé par le milieu), nulle sur le sous-espace $\mathcal{D}$ des champs de moments. En présence d'une distribution $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{V}$ " d'efforts appliqués ", de même support Ω , on a :

1°) Si le milieu est libre :

$$\forall\ (p \mapsto \delta p) \in \mathcal{V}\quad \mathcal{T}(p \mapsto \delta p) = \mathcal{F}(p \mapsto \delta p)$$

2°) Si le milieu est lié :

$$\forall\ (p \mapsto \delta p) \in \mathcal{V}'\ \mathcal{T}(p \mapsto \delta p) = \mathcal{F}(p \mapsto \delta p)$$

où $\mathcal{V}'$ est le sous-espace des déplacements virtuels compatibles avec la liaison.

En considérant une distribution $\mathcal{T}$ du 1° ordre (théorie du 1° gradient) et par un calcul formellement identique à celui que nous avons fait pour un milieu conservatif, on aboutit à des équations qui ont rigoureusement la même forme.

2,2 - Liaisons internes dans les coques.

Soit $\mathcal{S}$ la surface support à bord γ et à coins $q_1 \ldots q_n$ (on pose $\partial \mathcal{S} = \gamma \cup \{q_1 \ldots q_n\}$.

Soit $\mathcal{V}$ l'espace des champs de vecteurs de R^3 le long de $\mathcal{S}$ (espace des déplacements virtuels). Si $(p \mapsto Z) \in \mathcal{V}$, $\exists$ un champ de vecteurs tangents $(p \mapsto V)$ et un champ scalaire $(p \mapsto u)$ tels que $Z = V + u\,N$.

Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace de $\mathcal{V}$, des champs le long de $\mathcal{S}$ prolongeables par un champ de moments.

Soit $\mathcal{V}'$ un sous-espace de $\mathcal{V}$ contenant $\mathcal{D}$: le sous-espace des déplacements virtuels compatibles.

Principe des travaux virtuels : La contrainte est une distribution réelle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{V}$, de support $\mathcal{S} - \partial\,\mathcal{S}$, nulle sur $\mathcal{D}$. En présence d'une distribution $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{V}$ d'"efforts appliqués", de même support, on a :

1°) Si la coque est libre :

$\forall\ (p \mapsto Z = V + u\,N) \in \mathcal{V}$ $\quad \mathcal{C}(p \mapsto Z) = \mathcal{F}(p \mapsto Z)$

2°) Si la coque est liée :

$\forall\ (p \mapsto Z = V + u\,N) \in \mathcal{V}'$ $\quad \mathcal{C}(p \mapsto Z) = \mathcal{F}(p \mapsto Z)$

Supposons donnée une liaison interne holonôme : elle porte sur la forme, donc sur les champs $x \mapsto G$ et $x \mapsto F$ des matrices des formes quadratiques (dans une carte).

Une telle liaison, scalaire et du 1° ordre, s'écrit :

$$\ell(G,F) = 0 \qquad (0 \in R)$$

Lemme : Le sous-espace $\mathcal{V}'$ des déplacements virtuels compatibles avec une liaison holonôme, scalaire, du 1° ordre, $\ell(G,F) = 0$ est défini par :

$$(p \mapsto V + u\,N) \in \mathcal{V}' \iff \mathrm{Tr}\left(\Phi\left[\frac{\partial V}{\partial p} - uC\right]\right) + \mathrm{Tr}\left(\psi \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial p} + cV\right)\right) = 0$$

ce qu'on peut encore écrire : $\mathrm{Tr}([\Phi - \psi C]\Delta) + \mathrm{Tr}(\psi K) = 0$

où Δ et K sont définis au § 1,2 de ce chapitre.

Et l'on a : $\Phi = S\left[2\frac{\partial \ell}{\partial G}\,G + \frac{\partial \ell}{\partial F}\,F\right]S^{-1} \qquad \psi = S\,\frac{\partial \ell}{\partial F}\,G\,S^{-1}$

$\Phi - \psi\,C$ et ψ sont symétriques.

En effet de $\ell(G,F) = 0$ on déduit $\mathrm{Tr}(\frac{\partial \ell}{\partial G}\,\delta G) + \mathrm{Tr}(\frac{\partial \ell}{\partial F}\,\delta F) = 0$.

Des expressions de δG et δF (chapitre 1, § 1,4,2), on déduit la relation cherchée.

Définition : Une liaison du 1° ordre (a priori non holonôme) est la donnée d'un sous-espace $\mathcal{V}'$ des champs de vecteurs de R^3 le long de $\mathcal{S}$ défini par une relation $\mathrm{Tr}(Q_o\Delta) + \mathrm{Tr}(B_o K) = 0$ où $(p \mapsto Q_o)$ et $(p \mapsto B_o)$ sont des champs de 2-tenseurs symétriques donnés du plan tangent.

Du principe des travaux virtuels on déduit l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $p \mapsto \lambda$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{T}\ (p \mapsto V + u\,N) - \mathcal{F}(p \mapsto V + u\,N) = \int_{\mathcal{S}} \lambda[\mathrm{Tr}(Q_o\Delta) + \mathrm{Tr}(B_o K)]\ d\mathcal{S} \\ \forall\ (p \mapsto V + u\,N) \in \mathcal{V} \end{cases}$$

On obtient, en posant $A_o = Q_o + B_o C_o$ (de même que $A = Q + BC$) :

$$\mathcal{F}(p \mapsto V + u\,N) = \int_{\mathcal{S}} \{\mathrm{Tr}([A-\lambda A_o][\frac{\hat{\partial} V}{\partial p} - uC]) - \mathrm{Tr}([B-\lambda B_o]\frac{\hat{\partial}}{\partial p}(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV))\}\ d\mathcal{S}$$

D'où l'on déduit, par un calcul formellement identique à celui du § 2,2,2 du chapitre 1 :

$$(E')\quad \begin{cases} F = \{-\overline{\mathrm{Div}(A-\lambda A_o)} - C\ \overline{\mathrm{Div}(B-\lambda B_o)}\} + \{[\mathrm{div}\ \overline{\mathrm{Div}(B-\lambda B_o)} - \mathrm{Tr}([A-\lambda A_o]C)]N\} & (\text{sur } \mathcal{S}) \\ f = \{(\overline{A-\lambda A_o})n + \bar{n}(B-\lambda B_o)t.Ct\} - \{[\mathrm{Div}(B-\lambda B_o).n + \frac{\partial \bar{n}(B-\lambda B_o)t}{\partial \gamma}]N\} & (\text{sur } \gamma) \\ F_i = -[\bar{n}(B-\lambda B_o)t]_i N_i & (\text{aux coins}) \\ M = -(\bar{n}(B-\lambda B_o)n)t & (\text{sur } \gamma) \end{cases}$$

C'est à dire exactement les équations (E) (cf. § 1,1 de ce chapitre) où les contraintes A et B ont été remplacées par $(A-\lambda A_o)$ et $(B-\lambda B_o)$. Le multiplicateur λ est une inconnue supplémentaire mais, on dispose de l'équation supplémentaire $\ell(G,F) = 0$ (ou $\mathrm{Tr}(Q_o\Delta) + \mathrm{Tr}(B_o K) = 0$).

Coques soumises à des compressions liées par une relation $\ell(G,F,h) = 0$.

Une configuration d'une coque compressée est la donnée d'une configuration de la surface support et du champ d'épaisseur $p \mapsto h$. Un déplacement virtuel est un couple $((p \mapsto Z),(p \mapsto \delta h))$ d'un champ de vecteurs le long de $\mathcal{S}$ et d'un champ scalaire $p \mapsto \delta h$ (de variation d'épaisseur).

$\mathcal{V} = \{((p \mapsto Z),(p \mapsto \delta h))\}$ est l'espace vectoriel des déplacements virtuels dont le sous-espace $\mathcal{D}$ sur lequel la distribution des contraintes est nulle est

$\mathcal{D} = \{((p \mapsto Z),(p \mapsto \delta h))/(p \mapsto Z)$ est prolongeable par un champ de moments et $\delta h = 0\ \}$

Le sous-espace des déplacements virtuels compatibles est défini par :

$$((p \to V + uN),(p \to \delta h)) \in \mathcal{V}' \iff \mathrm{Tr}[(A_o + B_o C)\Delta] + \mathrm{Tr}(B_o K) + k\,\delta h = 0$$

$$\left(\text{avec } k = \frac{\partial \ell}{\partial h}\right)$$

On déduit du principe des travaux virtuels :

Les équations (E')

L'équation de compression (cf. ch.2 § 2,3) : $c_e = c - \lambda k$ (c_e est la compression appliquée, c la compression due aux contraintes, $-\lambda k$ la compression due à la liaison ; $c = \frac{q}{h}$ où q est la contrainte de compression).

Coques incompressibles.

L'incompressibilité est une liaison interne qui s'exprime par la relation $\boxed{h\sqrt{\det G} - h_o\sqrt{\det G_o} = 0}$. (l'indice zéro caractérise la configuration de référence). Cette condition exprime que la matériau constituant la coque est incompressible. Si l'on note $\ell(G,F,h) = 0$ la relation, on a :

$$\frac{\partial \ell}{\partial F} = 0 \qquad \frac{\partial \ell}{\partial G} = \frac{h}{2}\sqrt{\det G}\, G^{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ell}{\partial h} = \sqrt{\det G}$$

D'où $\Phi = h\sqrt{\det G}$ (Φ est scalaire) $\psi = 0$ et $k = \sqrt{\det G}$

En posant $\mu = \lambda h \sqrt{\det G}$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} F = \{-\overline{\mathrm{Div}\ A} - C\ \overline{\mathrm{Div}\ B}\} + \{[\mathrm{div}\ \overline{\mathrm{Div}\ B} - \mathrm{Tr}(AC)]N\} - \mathrm{grad}\,\mu - \mu\,\mathrm{Tr}(C)N & (\text{sur } \mathcal{S}) \\ f = \{\bar{A}\ n + \bar{n}\ Bt.Ct\} - \{[\mathrm{Div}\ B.n + \frac{\partial \bar{n} Bt}{\partial \gamma}]N\} + \mu\ n & (\text{sur } \gamma) \\ F_i = [\bar{n} Bt]_i N_i & (\text{aux coins}) \\ M = -\bar{n}\ Bn.(t & (\text{sur } \gamma) \\ c = \frac{q}{h} + \frac{\mu}{h} & (\text{sur } \mathcal{S}) \end{cases}$$

μ est un scalaire ayant la dimension d'une contrainte (donc d'une pression) ; $\frac{\mu}{h}$ est une compression.

2,3 - Coques fibreuses.

Comme dans le cas du milieu à 3 dimensions, on écrit l'inextensibilité du matériau suivant certaines directions, définies en chaque point par un vecteur tangent u_o dans la configuration de référence.

Soit X l'image de u_o dans R^2 : $u_o = \frac{\partial p_o}{\partial x} X$, $u = \frac{\partial p}{\partial x} X$ et $u = \frac{\partial p}{\partial p_o} u_o$.

On a $ds^2 = ds_o^2$ soit $\frac{1}{2}(\bar{X}\, G\, X - \bar{X}\, G_o X) = \ell(G) = 0$

Ici $\frac{\partial \ell}{\partial F} = 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial G} = \frac{1}{2}\, X\, \bar{X}$ et $\frac{\partial \ell}{\partial h} = 0$

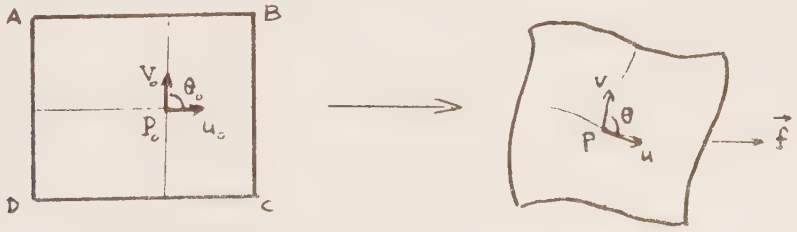
Alors $A_o = \frac{\partial p}{\partial x}\ 2\frac{\partial \ell}{\partial G} G \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{\partial p}{\partial x} X \bar{X} \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1} = u \bar{u}$.

Les équations d'équilibres sont les équations (E), dans lesquelles A est remplacé par $A-\lambda u \bar{u}$ où u est le vecteur unitaire tangent à la fibre (inextensible). λ est une tension.

Si une coque possède deux familles de fibres inextensibles définies par des champs de vecteurs unitaires $p \mapsto u$ et $p \mapsto v$ il y a deux liaisons scalaires donc deux multiplicateurs λ et μ et la contrainte superficielle devient

$A-(\lambda u \bar{u} + \mu\, v\, \bar{v})$

Exemple = : Etudions les faibles déformations dans son propre plan d'une plaque rectangulaire dont les parallèles aux côtés sont inextensibles. On suppose que la plaque n'est soumise qu'à des tensions aux bords.



Les équations se réduisent à :

$$\begin{cases} \mathrm{Div}(A-\lambda\, u\, \bar{u} - \mu\, v\, \bar{v}) = 0 & \text{en p} \\ (A-\lambda\, u\, \bar{u} - \mu\, v\, \bar{v})\, n = f & \text{au bord} \end{cases}$$

L'énergie spécifique de déformation élastique ne dépend que de l'angle

$\theta = (u,v)$. Si l'on pose $\delta = \frac{1}{2}\cos\theta$ $(\cos\theta = \bar{u}\,v)$, la déformation tangentielle Δ a pour expression $\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix}$, au second ordre près, dans le repère $[u,v]$. La contrainte superficielle A a pour expression $\begin{bmatrix} N_1 & T \\ T & N_2 \end{bmatrix}$ et l'on a $T = k\delta$ où k est un module d'élasticité.

Au second ordre près, $A - \lambda\, u\,\bar{u} - \mu\, v\,\bar{v}$ a pour expression $\begin{bmatrix} \lambda' & k\delta \\ k\delta & \mu' \end{bmatrix}$ (où $\lambda' = N_1 - \lambda$ et $\mu' = N_2 - \mu$) et les équations deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda'}{\partial x} + k\,\dfrac{\partial \delta}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mu'}{\partial y} + k\,\dfrac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{ en tout point intérieur.} \\[2ex] f = \begin{bmatrix} \lambda \\ k\delta \end{bmatrix} \text{ sur les bords A D et B C} \\[2ex] f = \begin{bmatrix} k\delta \\ \mu' \end{bmatrix} \text{ sur les bords A B et D C.} \end{array}\right.$$

3 - Microstructures.

Nous avons déjà rencontré des coques avec microstructures : au chapitre 2 (§ 2,3) et au début de ce chapitre (§ 1,4, § 2,2) les coques soumises à des " compressions " où la microstructure et le champ $p \mapsto h$ d'épaisseur ; au paragraphe 1,4 de ce chapitre les coques soumises à des " contraintes de glissement " où la microstructure et le champ de vecteurs tangents $p \mapsto V_d$ de glissement.

Nous proposons ici d'écrire les équations des coques de Cosserat. Afin de rendre plus aisée l'interprétation physique de cette microstructure, nous allons d'abord étudier les milieux à trois dimensions de Cosserat.

3,1 - Milieux de Cosserat.

3,1,1 - Définition.

Une configuration d'un milieu de Cosserat est la donnée de :

1°) Une configuration d'un milieu continu à trois dimensions.

2°) Un champ de bases unitaires $p \mapsto S$ en tout point du milieu.

Supposons donnée une configuration de référence de domaine Ω_o, sur laquelle le champ de base de Cosserat est $p_o \mapsto S_o$ ($\bar{S}_o S_o = 1$). Dans une configuration $\varphi : \Omega_o \to \Omega$, $p \mapsto S$ (avec $\bar{S}\, S = 1$) est défini sur Ω .

Posons $R = S\, \bar{S}_o$; on a $\bar{R}\, R = 1$; R est la rotation qui applique le repère de base en p_o sur le répère de base en p. On peut donc également définir la configuration par le couple $((\varphi : p_o \mapsto p), (\psi : p_o \mapsto R))$.

Par définition, deux configurations ont même <u>forme</u> (ce qu'on écrira $(\varphi_1,\psi_1) \sim (\varphi_2,\psi_2)$) si $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est isométrique (il existe une isométrie de R^3 qui prolonge $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$) et $R_2.R_1^{-1}$ est la rotation de cette isométrie :

$$(\varphi_1,\psi_1) \sim (\varphi_2,\psi_2) \iff \begin{cases} p_1 \mapsto p_2 \quad \text{est isométrique} \\ S_1 = \dfrac{\partial p_1}{\partial p}\, S \qquad (\text{soit : } \dfrac{\partial p_1}{\partial p} = S_1 \bar{S}) \end{cases}$$

La <u>conformation</u> de Cosserat d'une configuration (φ,ψ) est le champ de tenseurs défini sur Ω_o :

$$\boxed{p_o \mapsto K = \bar{R}\, \frac{\partial p}{\partial p_o} = S_o \bar{S}\, \frac{\partial p}{\partial p_o}}$$

K est représenté dans la base S_o par la matrice $\bar{S}_o K\, S_o = \bar{S}\, \dfrac{\partial p}{\partial p_o}\, S_o$.

3,1,2 - <u>Théorème</u> : Deux configurations ont même forme si et seulement si elles ont même champ de conformation : $K_1 = K_2$ $(\forall\, p_o \in \Omega_o)$.

1°) Si les deux configurations (φ_1,ψ_1) et (φ_2,ψ_2) ont même forme, $p_1 \mapsto p_2$ est une isométrie de rotation $\dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}$ et l'on a :

$$S_2 = \frac{\partial p_2}{\partial p_1}\, S_1 \quad \text{d'où } K_2 = S_o \bar{S}_2\, \frac{\partial p_2}{\partial p_o} = S_o \bar{S}_1\, \frac{\partial p_1}{\partial p_o} = K_1 \quad \left(\text{car } \overline{\frac{\partial p_2}{\partial p_1}} = \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\right)$$

2°) Si $K_2 = K_1$, alors $\dfrac{\partial p_2}{\partial p_o} = S_2 \bar{S}_1\, \dfrac{\partial p_1}{\partial p_o}$ donc $\dfrac{\partial p_2}{\partial p_1} = S_2 \bar{S}_1$

D'où $\overline{\dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}}\, \dfrac{\partial p_2}{\partial p_1} = 1$ et l'on sait que cela implique que $p_1 \mapsto p_2$ est une isométrie dont la rotation $\dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}$ transforme les champs de bases : $S_2 = \dfrac{\partial p_2}{\partial p_1}\, S_1$.

Conséquences : 1°) La forme d'une configuration d'un milieu de Cosserat est complètement définie par le champ de conformation de la configuration.

2°) Si le milieu possède une énergie spécifique α de déformation (invariante par isométrie) on peut poser :

$\alpha = \alpha(p_o, K, K', K'' \ldots)$, ou $\alpha = \alpha(p_o, K)$ dans la théorie du 1° gradient.

Cependant nous pouvons écrire les équations des contraintes des coques de Cosserat sans supposer l'existence d'une énergie potentielle de déformation par l'utilisation directe du principe des travaux virtuels.

3,1,3 - Principe des travaux virtuels et équations d'équilibre.

Un déplacement virtuel est la donnée d'un champ de vecteurs $(p \mapsto Z)$ de R^3 défini sur Ω et d'un champ de vecteurs $(p \mapsto \omega)$ de R^3 défini sur Ω . Le premier traduit le déplacement infinitésimal des molécules, le second la rotation infinitésimale des trièdres de Cosserat.

Il sera plus pratique de définir le déplacement virtuel d'un milieu de Cosserat par le couple $((p \mapsto Z), (p \mapsto i(\omega))$ où $i(\omega)$ est le 2-tenseur antisymétrique défini par $i(\omega)\, V = \omega \wedge V \quad (\forall\, V)$.

Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des déplacements virtuels. $\mathcal{D}$ est le sous-espace de $\mathcal{V}$ des déplacements virtuels qui laissent la forme invariante.

Lemme : $((p \mapsto Z), p \mapsto i(\omega)) \in \mathcal{D} \iff \boxed{\frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega) = 0}$ (sur Ω)(10)

En effet, posons $\delta p = Z$ et $\delta S = i(\omega)\, S$ ($\bar{S}\, \delta S$ est nécessairement antisymétrique car $\bar{S}\, S \neq 1$).

$\delta K = S_o\, \bar{S}\, \delta\left(\frac{\partial p}{\partial p_o}\right) + S_o\, \overline{\delta S}\, \frac{\partial p}{\partial p_o}$ soit :

$\delta K = K \frac{\partial p_o}{\partial p} \left[\frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega)\right] \frac{\partial p}{\partial p_o}$ et $\delta K = 0 \iff \frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega) = 0$

---

(10) Notons que $\frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega) = 0 \iff (p \to Z)$ est un champ de moments de rotation infinitésimale ω .

En effet si $\frac{\partial Z}{\partial p}$ est antisymétrique, il est nécessairement constant.

Principe des travaux virtuels.

La contrainte est une distribution $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{D}$, de support (borné) Ω, nulle sur $\mathcal{D}$. Le milieu est dit du premier ordre si la distribution est du premier ordre, auquel cas on a :

$$\mathcal{T} = \int_{\Omega} \mathrm{Tr}(A\,[\frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega)])\,d\,\Omega$$

La contrainte A n'est pas symétrique a priori.

Posons $A = Q + \frac{1}{2}\,i(c)$ où $Q = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$ et $i(c) = (A - \bar{A})$

Q est une contrainte symétrique et c un couple.

Par intégration par parties on obtient les équations :

$$\begin{cases} F_e = -\mathrm{Div}\ Q + \frac{1}{2}\ \mathrm{rot}\ c & (\text{sur } \Omega) \\ f_e = Qn - \frac{1}{2}\ c_{\wedge}\ n & (\text{sur } \partial\Omega) \quad (n = \text{vecteur unitaire normal au bord}). \\ c_e = -c & (\text{sur } \Omega). \end{cases}$$

F_e, f_e et C_e sont respectivement les force par unité de volume, force par unité de surface du bord et couple par unité de volume, appliqués au milieu.

3,1,4 - Théorie linéaire du milieu conservatif du premier ordre.

Notons encore $p \to Z$ la flèche et $p \to \omega$ le champ de rotation infinitésimale du trièdre de Cosserat.

La déformation de Cosserat $D_c = \frac{\partial Z}{\partial p} - i(\omega)$ a pour :

Partie symétrique : $D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial p} + \overline{\frac{\partial Z}{\partial p}}\right)$, la déformation du milieu.

Partie antisymétrique : $i(\frac{1}{2}\ \mathrm{rot}\ Z - \omega)$, la rotation infinitésimale du trièdre de Cosserat par rapport au milieu.

Le milieu possède une énergie spécifique de déformation α définie positive, quadratique par rapport aux déformations :

$$2\,\alpha = \lambda\ \mathrm{Tr}(D)^2 + 2\,\mu\ \mathrm{Tr}(D^2) + \nu(\omega - \tfrac{1}{2}\ \mathrm{rot}\ Z)^2$$

(avec $\mu \geqslant 0$, $3\,\lambda + 2\,\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$).

De $W = \int_\Omega \alpha(D_c)\, d\Omega$, on déduit $\delta W = \int_\Omega Tr\left(\frac{\partial \alpha}{\partial D_c}\, \delta D_c\right) d\Omega =$ ..

Soit $A = \frac{\partial \alpha}{\partial D_c}$.

Ou encore

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = \lambda\, Tr\, D + 2\,\mu\, D \\ C = \nu(\omega - \frac{1}{2}\, rot\, Z) \end{array}}$$

(relation contrainte-déformation)

(relation couple-rotation)

3,2 - Coques de Cosserat.

3,2,1 - Déplacements virtuels.

Un déplacement virtuel est la donnée de :

1°) Un champ de vecteurs $(p \mapsto Z)$ de R^3 le long de la surface support $\mathcal{S}$.

2°) Un champ de tenseurs antisymétriques $(p \mapsto i(\vec{\omega}))$ de R^3, le long de $\mathcal{S}$.

En utilisant la décomposition canonique de R^3 en chaque point p de $\mathcal{S}$: $R^3 = \{N\} \oplus T_p(\mathcal{S})$ on peut écrire :

$Z = V + u\, N \qquad (u \in R,\ V \in T_p(\mathcal{S}))$

$\vec{\omega} = \Omega + \omega\, N \qquad (\omega \in R,\ \Omega \in T_p(\mathcal{S}))$ ou $i(\vec{\omega}) = \left[\begin{array}{c|c} \omega\Sigma & -\Sigma\Omega \\ \hline \overline{\Omega\Sigma} & 0 \end{array}\right]$

(où Σ est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans $T_p(\mathcal{S})$, orientée par N ; $\overline{\Sigma} = \Sigma^{-1} = -\Sigma$)

Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des déplacements virtuels et $\mathcal{P}$ le sous-espace qui " invarie la forme ", défini par :

$((p \mapsto Z),(p \mapsto i(\vec{\omega}))) \in \mathcal{P} \iff$ [$p \mapsto Z$ est prolongeable sur R^3 par un champ de moments, de rotation infinitésimale égale à $\vec{\omega}$ (nécessairement constante dans R^3)] .

Lemme : $((p \mapsto Z), (p \mapsto i(\omega))) \in \mathcal{P} \iff$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial p} - uC = \omega\Sigma & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial p} + \overline{\nabla} C = -\overline{\Omega\Sigma} & (2) \\ K = 0 & (3) \end{cases}$$

K est défini au § 1,2 de ce chapitre.

1°) Si $(p \mapsto Z)$ est la restriction à $\mathcal{S}$ d'un champ de moments de R^3 de rotation infinitésimale $\vec{\omega}$ on a $\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p} + \overline{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) - uC = 0$ et $K = 0$ (théorème § 1,2 de

ce chapitre). Et nous avons vu qu'alors la rotation vérifie (1) et (2). Mais $\Delta = 0$ est une conséquence évidente de (1).

2°) (1) $\Rightarrow \Delta = 0$ et comme $K = 0$ on déduit du théorème cité que $p \mapsto Z$ est la restriction à $\mathcal{S}$ d'un champ de moments dont la rotation infinitésimale $\Omega_1 + \omega_1 N$ vérifie $\Omega_1 = -\Sigma\,(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV)$, $\omega_1 \Sigma = \frac{1}{2}(\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial p}})$; on en déduit $\Omega = \Omega_1$ et $\omega = \omega_1$.

3,2,2 - Travaux virtuels et équations d'équilibre.

La contrainte est une distribution sur l'espace $\mathcal{C}$, de support $\mathcal{S}-\partial\mathcal{S}$, nulle sur le sous-espace $\mathcal{D}$.

Les équations du premier ordre (par rapport aux déformations) s'obtiennent en posant, d'après le lemme précédent :

$$\tau = \int_{\mathcal{S}} \{\mathrm{Tr}(A[\hat{\frac{\partial V}{\partial p}} - uC - \omega\Sigma]) + \mathrm{Tr}(BK) + \overline{\Gamma}(\Omega + \Sigma[\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV])\}\, d\mathcal{S}$$

B est une contrainte symétrique (car $\bar{K} = K$)

Γ est un couple

A est une contrainte de partie symétrique Q et de partie antisymétrique $\frac{1}{2}\gamma\,\Sigma$: $A = Q + \frac{1}{2}\gamma\,\Sigma \quad (\gamma \in R)$

Alors τ devient :

$$\tau = \int_{\mathcal{S}} \{\mathrm{Tr}(Q\,\Delta) + \mathrm{Tr}(B\,K)\}\; d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{C}}.\vec{R}\; d\mathcal{S}$$

Le premier terme est la distribution de contraintes d'une coque sans microstructure (§ 1,3 de ce chapitre).

Le second terme est le travail d'un couple réparti $p \mapsto \vec{\mathcal{C}} = \Gamma + \gamma N$, dans la rotation infinitésimale $p \mapsto \vec{R} = \Omega + \Sigma[\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV] + (\omega - \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,V)\,N$.

$\vec{R}$ est le vecteur de rotation infinitésimale du trièdre de Cosserat par rapport à la coque : en effet, si la rotation infinitésimale (ou tourbillon) de la coque en p est $\Omega_1 + \omega_1 N$, on a $\omega_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,V$ et Ω_1 vérifie $\delta N = N \wedge \Omega_1$

(si δN est le déplacement infinitésimal du vecteur [illegible]).

Donc $\delta_N = \Sigma\Omega_1$ mais $\delta_N = -(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV)$ [chap.1, § 1,4,2]

D'où $\Omega_1 = -\Sigma\delta N = \Sigma(\overline{\frac{\partial u}{\partial p}} + CV)$.

Par intégration par parties on obtient :

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{\varphi}\,\vec{R}\, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} (\gamma\omega + \bar{\Gamma}\Omega)\, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}} [\overline{(-C\Sigma\Gamma + \tfrac{1}{2}\Sigma \text{ grad } \gamma)V - \text{rot } \Gamma . u}] \; d\mathcal{A}$$

$$+ \int_{\partial\mathcal{A}} \bar{n}\,\Sigma[\tfrac{1}{2}\gamma V + \Gamma u]\, d(\partial\mathcal{A})$$

D'où l'on déduit, en posant $A = Q - CB$, en comparant [illegible] équations [8] [chap.4 § 1,1] que l'on aurait si $\int \vec{\mathcal{C}}.\vec{R}\, d\mathcal{A}$ était nul :

Equations d'équilibre des coques de Cosserat (du 1° ordre) :

$$F = \{-\overline{\text{Div } A} - C[\overline{\text{Div } B} + \Sigma\Gamma] + \tfrac{1}{2}\Sigma \text{ grad } \gamma\} + \{[\text{div}(\overline{\text{Div } B}) - \text{Tr}(AC) - \text{rot } \Gamma]N\} \quad \text{(sur } \mathcal{A})$$

(avec $A = Q - CB$)

$$f = \{(\bar{A} - \tfrac{1}{2}\gamma\Sigma)n + \bar{n}\, Bt.Ct\} - \{[\text{Div } B - \bar{\Gamma}\Sigma]n + \overline{\frac{\partial \bar{n}.B\Gamma}{\partial \nu}}\,]N\} \quad \text{(sur } \partial\mathcal{A})$$

$$F_i = -[\bar{n}\, Bt]_i N_i \quad \text{(aux coins)}$$

$$\mathcal{M} = \Gamma + \gamma N \quad \text{(sur } \mathcal{A})$$

$$m = -(\bar{n}\, Bn)\, t \quad \text{(sur } \partial\mathcal{A})$$

F, f, F_i, $\mathcal{M}$ et m sont respectivement : la densité surfacique de forces appliquées à $\mathcal{A}$, la densité linéaire de forces appliquées à $\partial\mathcal{A}$, la force concentrée au coin q_i, la densité surfacique de couples appliqués à $\mathcal{A}$, le moment de flexion appliqué au bord.

Remarques : 1°) La première et la deuxième équations peuvent être obtenues à partir des deux premières équations du système (E) (§ 1,1 de ce chapitre) en remplaçant A par $(A + \frac{1}{2}\gamma\Sigma)$ et Div B par $(\text{Div } B - \bar{\Gamma}\Sigma)$. En effet

$$\mathrm{Div}\left(A + \frac{1}{2}\gamma\Sigma\right) = \mathrm{Div}\, A + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\gamma.\Sigma \qquad (\text{et } \bar{\Sigma} = -\Sigma)$$

$$\mathrm{div}(\overline{\mathrm{Div}\, B} + \Sigma\Gamma) = \mathrm{div}\,(\overline{\mathrm{Div}\, B}) - \mathrm{rot}\,\Gamma$$

2°) Si B = 0 (membrane de Cosserat) et $\gamma = 0$ (le couple réparti est tangent), on obtient, en posant $W = \Sigma\,\Gamma$:

$$\begin{cases} F = \{-\overline{\mathrm{Div}\, A} - C\,W\} + \{\mathrm{div}\, W - \mathrm{Tr}(AC)N\} \\ f = \bar{A}n - (Wn)N \qquad (F_i = 0,\ m = 0) \\ \mathcal{M} = -\Sigma\,W \end{cases}$$

c'est à dire exactement les " <u>équations du premier gradient</u> " déduites de l'énoncé de Souriau du principe des travaux virtuels (§ 1,4 de ce chapitre).

Cependant nous y avons interprété W comme une différence de forces appliquées entre les deux faces or une telle contrainte (de glissement) est bien équivalente à la donnée d'un couple tangent orthogonal à W (cf. § 1,4 ; note 7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREUNEVAL (J.), Sur l'énergie de déformation des coques minces élastiques (C.R. Acad. Sc., t.264, série A, 1967, p.881-882).

[2] BREUNEVAL (J.), Sur les hypothèses de Love-Kirchhoff de la théorie linéaire des coques minces élastiques (polycopié), Marseille, 1967.

[3] BREUNEVAL (J.), Schéma d'une théorie générale des coques minces élastiques (Journal de Méc., vol.10, n° 2, 1971, p.291-313).

[4] BREUNEVAL (J.), Coques minces soumises à des liaisons internes (Journal de Méc., vol.11, n° 2, 1972).

[5] CASAL (P.), Capillarité interne en mécanique des milieux continus (C.R. Acad. Sc., t.256, série A, 1963, p.3820-3822).

[6] COHEN (J.W.), Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland Publ.Comp., Amsterdam, 1960, p.415-433.

[7] EISENHART (L.), Riemannian Geometry, Princeton University Press, 6° ed., 1966.

[8] GOHIER (S.), Rigidité des surfaces convexes à bords (Thèse, Paris, 1959).

[9] GREEN (A.E.), On the Linear Theory of Thin Elastic Shells (Proc. Roy. Soc., 266 A, 1962, p.143).

[10] GREEN (A.E.), Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells, (Proc.Roy. Soc., 269 A, 1962, p.481).

[11] GREEN (A.E.), et NAGHDI (P.M.), Some Remarks on the Linear Theory of Shells, Inst. Eng.Res. Berkeley, 1964

[12] KOBAYASHI (S.) et NOMIZU (K.), Foundations of Differential Geometry 2° tome Interscience Publishers, New-York, 1969.

[13] KOITER (W.T.), Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1960, p.12-33.

[14] LICHNEROWICZ (A.), Eléments de calcul tensoriel, A. Colin, Paris, 1962.

[15] LOVE (A.E.H.), A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4° ed.), Cambridge University Press and Dover, New-York, 1944.

[16] NAGHDI (P.M.), Foundations of Elastic Shell Theory, (Progress in Solid Mechanics, 4, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1963).

[17] NAGHDI (P.M.), On a Variational Theorem in Elasticity and its Application to Shell Theory (J. Appl. Mech., 1964).

[18] NOLL (W.), Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities (Arch. Rational Mech. and Anal., Vol.27, n° 1, 1967, p.1-32).

[19] NOVOZHILOV (V.V.), Thin Shell Theory (2° ed.), Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1964.

[20] REISSNER (E.), On a Variational Theorem in Elasticity (J. of Math. and Phys., Vol.29, 1950, p.90).

[21] REISSNER (E.), Stress Strain Relations in the Theory of Thin Elastic Shells (J. Math. and Phys., vol.31, 1952, p.109-119).

[22] SOURIAU (J.M.), La relativité variationnelle (Alger - Mathématiques, vol.5, n° 2, 1958).

[23] TIMOSHENKO (S.) et WOINOWSKI-KRIEGER (S.), Théorie des plaques et coques, Lib. Polytech. Ch. Béranger, Paris, 1961.

[24] TOUPIN (R.A.), Theories of Elasticity with couple stress (Arch. Rational Mech. and Anal., vol.17, 1964, p.85).

[25] TRUESDELL (C.) et NOLL (W.), The non-linear Field Theories of Mechanics (Handbuch der Physik, vol.III/3, Springer, 1965).

[26] VALID (R.), Sur le calcul des coques hors du domaine élastique(C.R. Acad. Sc., t.263, série A., 1966, p.89-91).

[27] GERMAIN (P.), Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus (C.R. Acad. Sc., t.274, série A, 1972, p.1051-1055).

[28] MINDLIN (R.D.), Micro-Structure in Linear Elasticity (Arch. for Rational Mech., Vol.16, Springer, 1964).

[29] SOURIAU (J.M.), Mécanique relativiste des fils (C.R. Acad. Sc., Paris, t.270, 731 (1970).

Vu et permis d'imprimer

Marseille, le 23 Juin 1972

Le Président

F. BOREL